Digitized by the Internet Archive
in 2026 with funding from
University of Toronto

https://archive.org/details/figuresplantaire00wavr

FIGURES PLANÉTAIRES

ET

GÉODÉSIE

2026

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55
92840-32

As
W

CAHIERS SCIENTIFIQUES
PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE M. GASTON JULIA

FASCICULE XII

FIGURES PLANÉTAIRES

ET

GÉODÉSIE

PAR

R. WAVRE

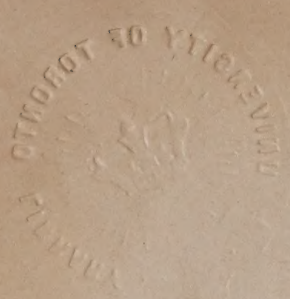
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Préface de M. Jacques HADAMARD
Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France
et à l'École Polytechnique.

508588
20.6.50

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1932



Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

PRÉFACE

Parmi tous les problèmes d'équilibre que se pose la Physique mathématique classique — en langage purement analytique, parmi tous ceux qui sont en relation avec les équations aux dérivées partielles du type elliptique — le plus attachant pour le Mathématicien, par la nature même des difficultés qu'il présente, sans contredit est celui de la figure des planètes. Ce qui caractérise en effet la catégorie des problèmes en question, ce qui justifie le labeur énorme dont ils ont été chaque jour l'objet, est l'influence si mystérieuse, d'une nature si cachée, qu'exerce la forme du domaine à l'intérieur duquel on opère. En général, ce domaine est donné. Dans l'étude (1) de la figure d'équilibre d'un fluide en rotation, c'est lui qui constitue l'inconnue à déterminer.

Un tel sujet devait donc exciter, à un bien plus haut degré, l'intérêt qu'ont soulevé, depuis Dirichlet, le problème qui porte son nom et les autres problèmes analogues tels que celui de Neumann. S'il n'a pas provoqué, à beaucoup près, le même nombre de travaux, ni accompli les mêmes progrès, c'est que la même raison qui rend le problème si attachant le rend aussi presque inaccessible à nos méthodes classiques de calcul.

Notre conception actuelle de ce problème évoque avant tout le nom de Poincaré, et c'est seulement depuis sa venue qu'on a la sensation d'une marche en avant dans cette étude. Il était impossible que Poincaré ne fût pas attiré par elle, et il est dans la nature des choses que, dans l'œuvre même de Poincaré, elle occupe une place à part. C'est, à notre

(1) On ne peut la comparer, sous ce point de vue, qu'à certains problèmes dits « inverses » récemment posés sur les fonctions harmoniques par M. Riabouchinsky et M. Demtchenko (*C. R. Acad. Sc.*, 1930) à la suite de recherches hydrodynamiques; et, au reste, c'est à un problème tout analogue que M. Wavre sera éventuellement conduit à la ramener.

connaissance, le seul de ses Mémoires où il se place au point de vue du Calcul fonctionnel, duquel relèvent, incontestablement, les admirables découvertes que chacun connaît et qui sont relatives aux figures de bifurcation et à l'échange des stabilités.

L'influence féconde de l'œuvre de Poincaré ne s'est pas arrêtée avec cette œuvre même et le progrès dont elle a été le signal se poursuit chaque jour dans les travaux contemporains. C'est ainsi qu'on sait établir aujourd'hui, pour toute figure d'équilibre relatif, l'existence d'un plan de symétrie équatorial, c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe de rotation, ce qui permet d'affirmer que, pour le cas du repos, l'axe de rotation étant alors de direction indéterminée, la seule figure est la sphère, alors que du temps de Poincaré, on connaissait uniquement pour cette figure la propriété de réaliser le minimum d'énergie potentielle. C'est ainsi que la célèbre inégalité par laquelle Poincaré est parvenu à limiter la vitesse angulaire possible en fonction de la densité moyenne a été, dans les travaux récents, notablement améliorée moyennant des restrictions simples.

Seulement, par une malchance trop fréquente dans nos essais d'explication des phénomènes, le but vers lequel nous semblons ainsi avancer quelque peu au prix de pénibles efforts tend par ailleurs à s'éloigner, et les résultats visés, à s'avérer inopérants au moment même où nous en atteignons quelques-uns. Un examen plus attentif des faits les montre sous un jour notablement moins simple que ne le supposent les théories classiques, même celle de Clairaut où il est tenu compte de la constitution hétérogène de l'astre considéré. Le cas où celui-ci tourne d'une seule pièce n'est pas le seul, ni même peut-être le plus intéressant, comme le montre l'observation du Soleil, voire celle de Jupiter et de Saturne. Il y a plus : ainsi que le rappelle M. Wavre, des faits comme ceux-là ne sont pas sans rapport avec l'étude de notre Terre elle-même; ils peuvent être confrontés avec les données des géologues, y compris la toute récente idée de la dérive des continents.

D'autre part, le moment arrive peut-être de renoncer à certaines simplifications classiques et qui, en effet, s'imposaient jusqu'ici : telle celle de distinguer entre le mouvement des centres de gravité des corps célestes et l'étude des formes de ces corps, alors que les deux phénomènes réagissent forcément l'un sur l'autre et que la théorie de la Lune, par exemple, nous conduit d'ores et déjà à tenir compte de cette interaction;

telle aussi celle de réduire à des rotations autour d'un axe fixe les mouvements dont nous savons qu'ils sont affectés de précession et de nutation, etc.

Il y a dans tout cela de quoi tenter grandement un chercheur, M. Wavre s'y est adonné avec un remarquable succès et, qui plus est, il a déjà fait école, en provoquant, dans la même direction, les premières recherches d'un jeune savant qui a obtenu d'autres résultats encore dans cette branche de la Science, M. Dives. Le corps de doctrine qu'il a pu constituer est assez nouveau, assez original, assez nourri pour qu'il ait pu consacrer à ce qui est son œuvre personnelle, et non à un exposé encyclopédique, le volume qu'il nous présente aujourd'hui.

Ce n'est pas cependant que le lecteur ne puisse trouver dans ce volume un grand nombre des progrès auxquels nous avons fait allusion plus haut et qui ont renouvelé cette question de la figure des corps célestes. A plusieurs d'entre eux, en effet, l'auteur a coopéré en perfectionnant les résultats ou les démonstrations et en particulier en écartant certaines hypothèses restrictives. Tel est le cas pour le théorème (dû sous sa forme primitive à M. Lichtenstein) de la symétrie du système par rapport à un plan équatorial; pour le théorème de Stokes, pour les théorèmes de d'Alembert et de Clairaut, pour beaucoup d'autres points encore.

Mais surtout, M. Wavre arrive, par une méthode entièrement nouvelle, à parer à la grave difficulté dont, en particulier, Tisserand avait signalé l'importance et qui paralysait jusqu'ici la théorie dans son organe le plus essentiel, le développement du potentiel élémentaire $\frac{1}{r}$ — inverse de la distance entre deux points quelconques — suivant les puissances du rapport entre les rayons vecteurs qui joignent ces deux points à l'origine des coordonnées. Un tel développement n'est convergent que si l'on fait figurer en numérateur le plus petit de ces deux rayons vecteurs, de sorte qu'on est obligé de représenter cette même quantité $\frac{1}{r}$ par deux expressions différentes suivant les régions où se trouvent le point attirant et le point attiré. Point n'est besoin de rappeler longuement les difficultés inextricables auxquelles donne lieu cette circonstance. Le lecteur verra par quelle transformation d'une remarquable habileté l'auteur arrive à une méthode uniforme, c'est-à-dire n'utilisant qu'un seul des

deux développements en question, le même dans tous les cas, et cela de manière à ne considérer que des séries convergentes.

S'appuyant sur une pareille base, on comprend qu'il ait pu, grâce à la possibilité d'opérer en toute rigueur, reprendre utilement les divers chapitres de la théorie, la poursuivre là où on avait dû s'arrêter et en élucider bien des points obscurs. L'un des moins intéressants n'est pas le désaccord, bien connu depuis Poincaré, qui semblait jusqu'à présent exister entre les résultats des mesures géodésiques et ceux que fournit la théorie de la précession. C'est à quoi l'on arrivait en s'arrêtant à la première approximation, c'est-à-dire aux termes de l'ordre du carré de la vitesse angulaire de la Terre. Or cette vitesse est assez grande pour qu'il y ait incontestablement lieu de pousser jusqu'aux termes qui en introduisent la quatrième puissance, ce que la méthode uniforme permet de faire d'une manière vraiment systématique. On voit alors le désaccord s'évanouir, ou à très peu près : toutes les catégories d'observations — triangulations, mesures de pesanteur, précession et même inégalités de la Lune — conduisent, pour l'aplatissement, à des valeurs très voisines les unes des autres. Puissent ces clartés arracher à la politique — qui, paraît-il, se niche partout — les principes de la géodésie internationale!

Les nouveaux moyens d'action qu'il a créés et, comme il est naturel, l'intervention du Calcul fonctionnel permettent à M. Wavre de pousser plus loin la hardiesse et de s'attaquer aux problèmes singulièrement plus compliqués dont nous avons parlé plus haut. On constatera combien sont attachants les résultats déjà obtenus. Pour moi, je veux dire en terminant le plaisir que j'ai à saluer cette œuvre scientifique dont l'auteur est un hôte si assidu de notre École parisienne et y a noué avec nous tous de si solides liens d'amitié.

J. Hadamard.

FIGURES PLANÉTAIRES

ET

GÉODÉSIE

INTRODUCTION.

Dès que l'on fut en possession du principe de l'attraction universelle, trois problèmes généraux se posèrent dont la solution constitue l'objet principal de la mécanique céleste.

Le premier consiste à déterminer le mouvement des astres les uns par rapport aux autres. En raison des distances très grandes qui séparent les corps célestes, on put faire abstraction de leur forme particulière et on les assimila, tout simplement, à des points matériels.

Le second problème est inverse en quelque sorte. Il consiste à envisager un seul astre supposé fluide et à calculer la forme qu'il doit prendre en tant qu'effet de sa rotation propre et des attractions réciproques de toutes ses particules. Ce second problème est celui des figures d'équilibre, il domine la théorie des figures planétaires et la géodésie supérieure; c'est lui qui nous retiendra principalement dans les pages de ce livre.

Mais ce sont là deux cas limites, leur rapprochement donne lieu à des questions fort délicates et beaucoup moins élaborées. Elles consistent à tenir compte de la forme des astres dans le calcul de leurs mouvements relatifs et de ces mouvements dans le calcul des formes. C'est le troisième problème. Il est résolu en première approximation d'une manière satisfaisante dans deux cas spéciaux qui tous deux font intervenir l'attraction luni-solaire dans les déformations ou déplacements du géoïde : la précession des équinoxes où l'on cherche à mettre en évidence un changement d'orientation, à longue période, de l'ellipsoïde terrestre autour de son centre, et le phénomène des marées océaniques où l'on considère au contraire une déformation à courte période du

géoïde lui même. Mais ces deux cas sont encore idéaux et limites.

Les géologues, en effet, se posent aujourd'hui des questions où la Terre dans son ensemble paraît devoir intervenir.

On connaît, en effet, l'hypothèse de M. Wegener (1), aussi audacieuse que féconde. Les continents, assimilés à des corps flottants, se seraient déplacés au cours des âges et ces déplacements se seraient accompagnés d'une migration des pôles dans la surface terrestre.

Cette idée, qui ne laisse pas de troubler notre quiétude astronomique, doit être abordée sans parti pris, au point de vue mécanique. Elle a pour elle d'expliquer un faisceau de phénomènes des ordres les plus divers : paléontologiques, climatologiques, techtoniques, etc., qui paraissent absolument inexplicables autrement.

A cet égard, il faut remarquer que les astres de notre voisinage, le Soleil et les grosses planètes, présentent une singularité qui est peut-être caractéristique, du stade qui a précédé celui où la Terre se trouve aujourd'hui et dont M. Dive (2) vient de faire une étude méthodique. Ces corps ne tournent pas tout d'une pièce sur eux-mêmes. Les différentes zones parallèles cheminent avec des vitesses angulaires différentes. L'équateur solaire, par exemple, accomplit sa révolution en 25 jours, tandis que le voisinage des pôles en exige au moins 28. La viscosité du fluide enrayera à la longue ce mouvement zonal mais elle n'y a pas encore réussi complètement ni sur le Soleil, ni même sur Jupiter et sur Saturne. Dès lors, je ne vois pas d'arguments décisifs qui s'opposeraient à ce que le magma terrestre eût été animé au cours des époques géologiques de courants très lents, derniers vestiges d'un mouvement zonal troublé par un mouvement de précession. Ces courants peuvent avoir entraîné lentement les masses continentales et s'être accompagnés d'un déplacement des pôles sur la surface terrestre.

Ni le scepticisme absolu, ni le dogmatisme ne sont admissibles dans ce domaine. Il faut simplement requérir avec Laplace : que la force des preuves soit proportionnée à l'étrangeté des faits.

D'ailleurs, ce sont les mesures de longitude, reprises avec beaucoup de précision ces dernières années, qui décideront si les continents se déplacent actuellement.

M. Milankovitch (3) a signalé, d'autre part, une coïncidence frappante

---

(1) A. Wegener, *La genèse des continents et des océans* (collection Juvet, traduction française par M. Reichel, 1924, et 4e édition allemande, 1929).

(2) P. Dive, *Rotations internes des astres fluides*, Blanchard, Paris, 1930.

(3) M. Milankovitch, *Théorie mathématique des phénomenes thermiques produits*

entre les variations de l'orbite terrestre que prévoit la théorie des perturbations et les refroidissements périodiques correspondant aux différentes glaciations.

Par ces quelques renseignements sur la géologie contemporaine, j'aurai, je l'espère, montré combien une solution plus complète et moins idéale du troisième problème serait importante pour les sciences naturelles.

Il faudrait tenter de mettre en évidence le comportement d'une masse fluide, visqueuse, hétérogène, animée d'un mouvement qui diffère très peu d'une rotation d'ensemble autour d'un axe moyen dont la direction pourrait varier lentement, tant par rapport aux étoiles fixes que relativement au fluide lui-même.

L'idée d'une attraction entre les corps célestes n'est qu'une représentation d'un phénomène plus subtil que la gravifique d'Einstein nous a révélé et M. Crudeli (1) est parvenu à écrire les équations du champ créé par la Terre au point de vue de la théorie de la relativité généralisée. Mais, la loi de Newton fournit une excellente approximation pour la recherche du mouvement des astres. Au point de vue mathématique, la difficulté qui est inhérente à la recherche des figures d'équilibre se présente d'ailleurs, quel que soit le système adopté, newtonien ou einsteinien. Cette difficulté provient en effet de ce que chaque particule est soumise à l'action des autres et dépend de la répartition de toute la matière envisagée. Or c'est cette répartition qui est précisément l'inconnue.

Dans le langage technique, on peut dire que les domaines d'intégration sont les véritables inconnues du problème. Et ce sont ces domaines qu'il s'agit de déterminer.

Ce livre n'est nullement une œuvre encyclopédique sur ces vastes questions. Au contraire, c'est un exposé d'ensemble de mes recherches personnelles. Celles-ci sont parties des instruments mathématiques que l'on utilise habituellement depuis Laplace dans ce genre de recherches. Mais la mise en œuvre de ces instruments est, je crois, très différente de ce qu'on a fait jusqu'à maintenant. En particulier, la méthode dite « procédé uniforme » permet, par un chemin nouveau, et en satisfaisant

---

par la radiation solaire, Gauthier-Villars, Paris, 1920, et *Mathematische Klimalehre und astronomische Theorie der Klimaschwankungen*, Gebruder Borntraeger, Berlin, 1930.

(1) U. Crudeli, *Il Campo gravitationale terrestre* (*Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo*, t. LIV, 1930).

à un desideratum formulé par Tisserand, de sérier les résultats classiques de Clairaut, d'Alembert, Laplace, Poincaré, et d'en obtenir d'autres. Il concilie, par de nouvelles formules, les mesures géodésiques et les mesures précessionnelles. Si cette synthèse est admise par les spécialistes j'en serai d'autant plus heureux qu'elle ne constituait pas le principal objet de mes recherches.

Mes préoccupations ont été celles-ci : satisfaire le plus possible au besoin de rigueur qu'éprouve tout mathématicien; dégager les hypothèses implicitement admises; en forger le moins possible.

Dans le premier Chapitre, je rappellerai les notions mathématiques nécessaires pour la compréhension du reste. Quant à la bibliographie très ample dans ce domaine, elle a été réunie jusqu'à l'année 1926 par M. Véronnet dans le fascicule XIII du *Mémorial des Sciences mathématiques*. Quelques travaux plus récents sont mentionnés en note.

En outre, une certaine indépendance a été maintenue entre les différentes parties de ce livre pour rendre sa lecture plus facile.

Je tiens à dire, tout particulièrement à M. G. Julia combien grande est ma reconnaissance envers lui et envers la maison d'édition Gauthier-Villars. Puisse cet ouvrage modeste n'être pas indigne de la magnifique collection des « Cahiers scientifiques ».

CHAPITRE I.

RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS MATHÉMATIQUES.

1. **Terminologie relative à la théorie des ensembles.** — Par voisinage d'un point, nous entendons l'intérieur d'une sphère de rayon arbitrairement petit centrée en ce point. Soit e un ensemble de points. Nous dirons qu'un point P est point d'accumulation de e, si dans son voisinage il y a des points de e, autre que lui-même au cas où il ferait partie de e. Alors, il y a évidemment aussi une infinité de points de e dans le voisinage de P, et en particulier une suite de points de e : $P_1, P_2, P_3, \ldots$, qui tendent vers P.

L'ensemble dérivé e' de l'ensemble e sera l'ensemble des points d'accumulation de e. Le complémentaire $c(e)$ de e sera l'ensemble des points qui ne font pas partie de e. La frontière $F(e)$ de e sera formée des points communs, soit à e et à $c'(e)$, soit à e' et à $c(e)$. Symboliquement on aura

$$F(e) = e\,c'(e) + e'\,c(e).$$

Dans le voisinage d'un point frontière, il y a au moins un point de l'ensemble et un point du complémentaire. Un ensemble sera fermé s'il contient toute sa frontière. Il sera dit ouvert s'il ne contient aucun point de sa frontière. Exemple d'ensemble ouvert : un cube faces non comprises; exemple d'ensemble fermé : un cube faces comprises. La frontière est ici constituée par les faces.

Un point sera dit intérieur à un ensemble s'il fait partie de l'ensemble sans faire partie de la frontière. Il appartient donc à l'ensemble ainsi que tout son voisinage. Un ensemble ouvert sera dit un « domaine ». Il ne contient par ce qui précède que des points intérieurs.

2. **Fonctions régulières et surfaces régulières.** — Dans la suite nous aurons constamment à considérer des fonctions de trois variables $\varphi(x, y, z)$ et les surfaces que l'on obtient en exprimant que cette fonction se réduit à une constante. Telles seront les surfaces de niveau dans le problème des figures d'équilibre. On ne verra pas d'objection à ce

que je distingue ici par deux termes différents une régularité au sens faible et une régularité au sens fort. Je dirai qu'une fonction $\varphi(x, y, z)$ définie et univoque dans un domaine D est régulière au sens faible dans D si elle est continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans D. Je dirai qu'elle est régulière au sens fort si les dérivées partielles secondes sont également continues dans D. L'existence et la continuité des dérivées ne sont requises que jusqu'au premier ordre pour la régularité au sens faible et jusqu'au second ordre pour la régularité au sens fort.

Donnons-nous maintenant une surface S par une représentation paramétrique en u et v,

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

Supposons que les fonctions x, y, z soient continues et admettent des dérivées partielles premières continues, et que, en plus, l'un des jacobiens

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$$

soit différent de zéro en un point M de la surface. Ce point M sera dit un point régulier de la surface. Une portion de la surface sera dite régulière si elle ne contient que des points réguliers. Si, au voisinage d'un point régulier de la surface, les fonctions x, y, z de u et de v admettent des dérivées partielles secondes continues, le point en question sera dit régulier au sens fort, et une portion de surface qui ne contient que des points réguliers au sens fort sera dite régulière au sens fort.

En un point régulier, la surface admet un plan tangent et une normale, ces deux éléments varient d'une manière continue quand on passe d'un point à un autre, d'une portion régulière de surface. Si la surface est régulière au sens fort, elle admet en plus des courbures principales qui varient aussi d'une manière continue d'un point à un autre. Il en est de même de la courbure moyenne et de la courbure totale.

En vertu du théorème d'existence des fonctions implicites, ces propositions ont leur analogue dans le cas où la surface serait donnée par une relation de la forme $F(x, y, z) = \text{const}$. Si la fonction F est régulière au sens faible et si de plus en un point l'une des dérivées partielles premières est différente de zéro, ce point est un point régulier. Au voisinage de celui-ci, le plan tangent et la normale existent et varient d'une manière continue. Si, en plus, la fonction F est régulière

au sens fort, les courbures existent et varient également d'une manière continue.

3. **La dérivée normale.** — Soit $\varphi(x, y, z)$ une fonction régulière dans un domaine D. Soit en plus S une surface régulière immergée dans D. Considérons un point M de la surface et la normale en ce point. Prenons un autre point P, voisin de M et situé sur la normale. Formons le rapport

$$\frac{\varphi(P) - \varphi(M)}{\overline{MP}},$$

puis faisons tendre P vers M, le rapport tend vers une limite que l'on représente par

$$\frac{d\varphi}{dn}$$

et qui est la dérivée de φ suivant la normale, ou simplement la dérivée normale de φ. On précise d'ordinaire la direction choisie sur la normale et dn est compté positivement dans cette direction-là. Écrivons

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dn}.$$

Si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale dans le sens de parcours choisi, on a donc encore

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\gamma. \tag{1}$$

Pour les surfaces fermées que nous aurons à considérer plus tard, il est utile de faire la convention suivante : désignons par dn_I et dn_E les éléments de normales dirigés vers l'intérieur I et vers l'extérieur E de la surface. Les deux éléments seront comptés tous deux positivement quoique dirigés en sens inverse. Alors, on a évidemment

$$\frac{d\varphi}{dn_I} = -\frac{d\varphi}{dn_E}. \tag{2}$$

La dérivée normale varie d'une manière continue quand le point M se déplace sur la surface comme le montre la formule (1), puisque, dans le cas envisagé, les dérivées partielles de φ et les cosinus directeurs α, β, γ varient d'une manière continue.

4. **Les identités de Green.** — Formons, avec une fonction φ régulière

au sens fort, l'expression

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Cette somme s'appelle le « laplacien » de φ. Elle sera représentée par le symbole $\Delta\varphi$, elle est bien définie et continue dans toute région où la fonction est régulière au sens fort. Soient Σ une surface régulière au sens faible et fermée qui peut avoir la connexité de la sphère ou celle du tore, et X, Y, Z trois fonctions régulières au sens faible dans le volume V intérieur à Σ ainsi que sur cette surface elle-même; c'est-à-dire sur l'ensemble $V + \Sigma$.

La première identité de Green s'écrit

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV + \int (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\Sigma = 0, \tag{3}$$

l'intégrale étendue à V est triple, la seconde est une intégrale double étendue à Σ, puis, α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à Σ dirigée vers l'intérieur.

Si les fonctions X, Y, Z sont les dérivées partielles premières d'une fonction régulière au sens fort φ,

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

la quantité entre parenthèses du premier membre de (3) devient le laplacien de φ et celle du second membre, la dérivée normale de φ prise vers l'intérieur. La relation (3) donne lieu alors à cette deuxième identité de Green,

$$\int \Delta\varphi \, dV + \int \frac{d\varphi}{dn_I} d\Sigma = 0. \tag{4}$$

Enfin, si l'on considère deux fonctions régulières au sens fort φ et ψ dans le domaine D et que l'on prenne

$$X = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad Y = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad Z = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

la première identité de Green (3) donnera

$$\int \varphi \, \Delta\psi \, dV + \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dV + \int \varphi \frac{d\psi}{dn_I} d\Sigma = 0.$$

On obtient, évidemment, une relation semblable en intervertissant les lettres φ et ψ, et une soustraction donne la troisième identité de Green,

$$\int (\varphi \, \Delta\psi - \psi \, \Delta\varphi)\, dV + \int \left(\varphi \frac{d\psi}{dn_I} - \psi \frac{d\varphi}{dn_I} \right) d\Sigma = 0. \tag{5}$$

Cette formule (5) est encore vraie si les fonctions φ et ψ cessent d'être régulières au sens fort sur une surface S régulière, fermée ou non, qui divise le volume V en deux régions V′ et V″, pourvu que ces fonctions restent régulières au sens faible sur S. En effet, envisageons le cas où la surface S serait fermée, l'autre se traite d'une manière analogue. V′ sera la région intérieure à S et V″ la zone comprise entre S et Σ. L'identité (5) est valable pour chacun des deux domaines :

$$\int (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi)\, dV' + \int \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right) dS = 0$$

pour V′ qui est limité par S; et pour V″ qui est limité par S et par Σ

$$\int (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi)\, dV'' + \int \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right) (dS + d\Sigma) = 0.$$

Mais sur la surface S, dans la première formule, les dérivées normales doivent être prises vers V′, dans la seconde vers V″, c'est-à-dire en sens inverse. En vertu de (2) ces expressions égales et de signe contraire disparaissent par addition et l'on trouve la relation (5)

La formule (5) jouera dans la suite un rôle fondamental. Elle est encore valable dans les circonstances suivantes :

1° La frontière Σ est formée d'un nombre fini de surfaces régulières;

2° Les fonctions φ et ψ sont régulières au sens faible sur l'ensemble $V + \Sigma$;

3° Les dérivées secondes contenues dans les laplaciens sont continues dans un domaine $V - S$, où S est un ensemble d'un nombre fini de surfaces régulières;

4° Les laplaciens sont bornés dans $V - S$.

5. **Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet.** — Une fonction régulière au sens fort $\varphi(x, y, z)$ dans un domaine D sera dite harmonique dans D si son laplacien y est identiquement nul $\Delta\varphi = 0$. On sait qu'une fonction harmonique dans un domaine n'a ni maximum, ni minimum dans ce domaine. Sa plus grande et sa plus petite valeur seraient atteintes sur la frontière. Une fonction harmonique dans un domaine est analytique dans ce domaine, c'est-à-dire développable en série procédant suivant les puissances des trois variables x, y, z au voisinage de chaque point du domaine. Si la fonction est identiquement nulle au voisinage d'un point, elle est identiquement nulle dans tout le domaine.

Soient, maintenant, Σ une surface fermée, régulière, et $f(x, y, z)$ une fonction bien définie, univoque et continue sur la surface Σ.

Le problème intérieur de Dirichlet consiste à déterminer une fonction harmonique à l'intérieur de tout le volume V limité par Σ, continue sur l'ensemble $V+\Sigma$ et qui prenne sur Σ les mêmes valeurs que la fonction donnée f. Ce problème, on le démontre, admet une solution et une seule. *Le problème extérieur* de Dirichlet consiste à trouver une fonction harmonique à l'extérieur V de la surface Σ, nulle à l'infini, continue sur l'ensemble $V+\Sigma$ et prenant sur Σ les mêmes valeurs que f. Ce second problème admet également une solution et une seule.

6. **Le potentiel newtonien et les potentiels de surface.** — Soit $\rho(x, y, z)$ la densité d'une matière répartie dans un volume V limité par une surface fermée Σ. Nous supposerons que la fonction ρ est régulière au sens faible dans le volume $V+\Sigma$ (1).

Soient, en plus, P un point quelconque de l'espace et P′ un point de V, enfin, r leur distance. Formons l'expression

$$U(P)=\int \frac{\rho(P')}{r}\,dV.$$

Cette fonction U sera le potentiel newtonien créé par la matière répartie dans le volume V. Il est défini dans tout l'espace. On démontre que U est une fonction régulière au sens fort à l'extérieur de V et à l'intérieur de V. Mais les dérivées secondes subissent généralement une discontinuité quand on traverse la surface Σ. Les dérivées premières restent continues sur Σ, la fonction est donc régulière au sens faible dans l'espace entier. Elle est nulle à l'infini. A l'extérieur le potentiel newtonien est harmonique, il satisfait à l'équation de Laplace $\Delta U=0$. A l'intérieur il satisfait à l'équation de Poisson

$$\Delta U=-4\pi\rho.$$

Les dérivées partielles premières du potentiel newtonien

$$\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial z}$$

ne sont autres que les composantes de l'attraction que la matière envisagée exerce au point P de coordonnées x, y, z. Pour la clarté, nous appellerons dans la suite P le point potentié, et P′ le point potentiant.

Soient Σ une surface fermée, régulière, et ρ une fonction univoque et

(1) On peut se placer dans des circonstances plus générales (*voir* O. D. KELLOGG, *Foundation of potential theory*, Springer, Berlin, 1929).

continue sur Σ. On appelle « potentiel de simple couche » l'expression

$$U_1(P) = \int \frac{\rho}{r} d\Sigma.$$

La fonction U_1 est univoque et continue dans l'espace entier, elle est régulière au sens fort et harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de Σ. Ses dérivées premières subissent une discontinuité sur la surface Σ, qui se manifeste sur les dérivées normales de la manière suivante :

$$\frac{dU_1}{dn_I} + \frac{dU_1}{dn_E} = -4\pi\rho. \tag{6}$$

Cette somme devrait être nulle, comme le voudrait l'équation (2) si le potentiel U_1 était régulier au sens faible sur Σ.

On appelle « potentiel de double couche » l'expression

$$U_2(P) = -\int \rho \frac{d\frac{1}{r}}{dn_I} d\Sigma.$$

La dérivée normale est à prendre au point potentiant P′ vers l'intérieur de Σ. Si ψ désigne l'angle de PP′ et de dn_I en P′, on a

$$U_2(P) = +\int \rho \frac{\cos\psi}{r^2} d\Sigma.$$

Le potentiel de double couche est régulier au sens fort et harmonique à l'intérieur comme à l'extérieur de Σ; sur cette surface, il subit en général une discontinuité; l'intégrale de Gauss en fournit un exemple.

7. **Intégrale et formule de Gauss.** — Un cas particulier du potentiel U_2 est celui où la densité est constante. Supposons-la égale à l'unité. Le potentiel se réduit alors à l'intégrale de Gauss

$$\int \frac{\cos\psi}{r^2} d\Sigma.$$

Mais $d\Sigma\cos\psi$ est la projection de $d\Sigma$ sur le plan normal en P′ à la droite PP′ et l'élément sous le signe somme est l'angle solide $d\Omega$ sous lequel $d\Sigma$ est vu de P. L'intégrale de Gauss se réduit donc à

$$\int d\Omega.$$

Si le point P est à l'intérieur de Σ, elle vaut 4π; s'il est sur Σ, elle

vaut 2π ; enfin, si P est à l'extérieur, elle vaut zéro. On a donc

$$\int \frac{\cos\psi}{r^2}\, d\Sigma = \begin{cases} 4\pi, & \text{I}; \\ 2\pi, & \Sigma; \\ 0, & \text{E}. \end{cases}$$

Les lettres I, Σ, E qui suivront, à l'avenir, une formule indiquent que la relation exprimée est vraie quand le point potentié est à l'intérieur I d'une surface fermée Σ, sur cette surface elle-même, ou à l'extérieur E.

La troisième identité de Green, formule (4), s'applique à un potentiel newtonien et donne

$$\int \Delta U\, dV + \int \frac{dU}{dn_I}\, d\Sigma = 0. \tag{7}$$

L'équation de Poisson donne d'autre part $\Delta U = -4\pi\rho$ et l'équation (7) devient

$$4\pi \int \rho\, dV = \int \frac{dU}{dn_I}\, d\Sigma.$$

La première intégrale est égale à la masse totale M de la portion intérieure à Σ de la matière qui crée le potentiel U. On a par conséquent

$$4\pi M = \int \frac{dU}{dn_I}\, d\Sigma.$$

Cette formule est encore due à Gauss.

8. **Sur le potentiel créé par une masse homogène.** — Nous allons montrer que le potentiel créé par une masse homogène, tout entière à distance finie, est une fonction analytique à l'intérieur de la masse.

Soient, en effet, V le volume occupé par cette matière homogène et s l'intérieur d'une sphère contenant le volume V ; soit, enfin, Z la partie de la sphère extérieure à V. On a symboliquement $V = s - Z$. Le potentiel créé par V est la différence des potentiels créés par la sphère entière et par la zone, la densité étant supposée être toujours la même. Le potentiel créé par Z est harmonique et analytique dans V, le potentiel créé par s est aussi analytique dans s et en particulier dans V quoiqu'il n'y soit pas harmonique. En effet, si τ désigne la distance du point potentié au centre de la sphère et t le rayon de celle-ci, ce potentiel est, par une propriété connue des sphères homogènes et des couches sphériques homogènes,

$$-\frac{2\pi}{3}\tau^2 + 2\pi t^2.$$

Le paramètre t est constant et l'on a $\tau^2 = x^2 + y^2 + z^2$. C'est une fonction analytique. La différence des deux potentiels de s et de Z est bien analytique dans le volume V considéré. Cette propriété particulière interviendra plus tard.

L'équation de Poisson permettrait de démontrer la proposition suivante, plus générale : le potentiel newtonien est analytique dans tout domaine où la densité est elle-même analytique.

9. **Sur les charges électriques en équilibre.** — Envisageons un potentiel U_1 de simple couche (*voir* § 6) et supposons qu'il soit constant à l'intérieur de la couche. Alors, l'équation (6) se réduit à

$$\frac{dU_1}{dn_E} = -4\pi\rho,$$

car on a

$$\frac{dU_1}{dn_I} = 0.$$

La densité a en chaque point de la couche un signe constant, le même que U_1. En effet, si U_1 était positif et la densité négative, la dérivée $\frac{dU_1}{dn_E}$ serait positive. Le potentiel croîtrait quand on traverse la surface vers l'extérieur; il devrait avoir un maximum à l'extérieur, car il s'annule, comme on sait, à l'infini. Or cela est impossible puisque ce potentiel est harmonique à l'extérieur de la surface. Si U_1 était négatif, ce raisonnement se conduirait de la même façon. Enfin, si U_1 était nul, la densité serait nulle partout, sans quoi U_1 aurait soit un maximum soit un minimum à l'extérieur de la surface, ce qui est exclu.

Traduite dans le langage de l'électrostatique, cette proposition a une signification physique immédiate : une charge en équilibre à la surface d'un conducteur ne peut pas changer de signe. Elle a le signe du potentiel, et si celui-ci est nul, la charge est nulle partout.

10. **Polynomes de Legendre et fonctions sphériques.** — L'emploi des fonctions sphériques s'est toujours révélé très utile dans la théorie des figures d'équilibre depuis que Laplace les y a introduites.

A plusieurs reprises, nous représenterons le cosinus par la lettre c et le sinus par la lettre s, afin de condenser les formules. Ainsi $c\theta$ remplace $\cos\theta$ et $s\theta$ remplace $\sin\theta$.

Le $n^{\text{ième}}$ polynome de Legendre $X_n(x)$, où n peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., est défini par la relation

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Pour $n = 0$, on fera $X_0(x) = 1$. Posons d'une manière plus générale

$$X_n^p(x) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{(n+p)!}(1-x^2)^{\frac{p}{2}}\frac{d^{n+p}(x^2-1)^n}{dx^{n+p}},$$

où p prend les valeurs entières allant de 1 à n.

On a $X_n(1) = 1$ et $X_n^p(1) = 0$.

Remplaçons ensuite x par $c\theta$ et formons les $2n+1$ fonctions de deux angles θ et ψ

$$X_n(c\theta), \qquad X_n^p(c\theta)cp\psi, \qquad X_n^p(c\theta)sp\psi. \tag{8}$$

Ce sont les $2n+1$ fonctions sphériques fondamentales d'ordre n.

Toute forme linéaire $Y_n(\theta, \psi)$ des fonctions sphériques fondamentales d'ordre n sera dite « fonction sphérique d'ordre n ». Les coefficients des fonctions fondamentales sont des constantes, j'entends que ces quantités sont indépendantes de θ et de ψ; mais si la fonction Y_n dépend encore d'un paramètre, les coefficients pourront dépendre eux aussi de ce paramètre :

Si ψ désigne la longitude et θ le complément de la latitude d'un point situé sur une sphère, les fonctions sphériques s'interprètent comme fonctions d'un point de la sphère. Un théorème de Laplace permet d'affirmer que toute fonction univoque et continue $f(\theta, \psi)$ sur la sphère est représentable par une série de fonctions sphériques

$$f(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{+\infty} Y_n(\theta, \psi).$$

Indiquons les expressions des trois fonctions X_0, X_2, X_4

$$\begin{cases} X_0(c\theta) = 1, \qquad X_2(c\theta) = \dfrac{3}{2}c^2\theta - \dfrac{1}{2}, \\ X_4(c\theta) = \dfrac{35}{8}c^4\theta - \dfrac{15}{4}c^2\theta + \dfrac{3}{8}. \end{cases} \tag{9}$$

Les fonctions X_n d'indice impair sont des polynomes impairs en $c\theta$. On tire des relations (9) les suivantes, utiles dans les calculs pratiques :

$$\begin{cases} s^2\theta = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}X_2(c\theta), \\ s^4\theta = \dfrac{8}{15} - \dfrac{16}{21}X_2(c\theta) + \dfrac{8}{35}X_4(c\theta), \\ s^2\theta\, c^2\theta = \dfrac{2}{15} + \dfrac{2}{21}X_2(c\theta) - \dfrac{8}{35}X_4(c\theta). \end{cases} \tag{10}$$

Pour incorporer une équation de Poincaré à une certaine suite de relations, il nous sera nécessaire d'introduire un polynome de rang -1, il sera égal à l'unité par définition $X_{-1} = +1$. Sa valeur, on le voit, est la même que celle de X_0.

11. **Propriétés intégrales des fonctions sphériques.** — Les fonctions sphériques fondamentales (8) pourraient être ordonnées en une seule suite dénombrable pour toutes les valeurs de p et de n

$$p = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{avec } X_n^0 = X_n.$$

Cette suite est une suite orthogonale sur la sphère unité; c'est-à-dire que si Z' et Z'' représentent deux fonctions fondamentales quelconques mais différentes, prises dans cette suite, on a, sur la sphère unité,

$$\int Z' Z'' \, d\Omega = 0. \tag{11}$$

Il résulte de là que deux fonctions sphériques d'ordre différent sont également orthogonales :

$$\int Y_m Y_n \, d\Omega = 0. \tag{12}$$

Si, maintenant, on considère les fonctions sphériques spéciales $X_n(c\theta)$ et que l'on tient compte de l'expression de $d\Omega$ en coordonnées θ et ψ

$$d\Omega = s\theta \, d\theta \, d\psi,$$

on trouve

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} X_m(c\theta) X_n(c\theta) s\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \dfrac{4\pi}{2n+1} & \text{si } m = n. \end{cases}$$

d'où, en posant $c\theta = x$,

$$\int_{-1}^{+1} X_m(x) X_n(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{si } m = n, \end{cases}$$

Le polynome complémentaire X_{-1} est lui aussi orthogonal à toutes les fonctions sphériques fondamentales, sauf à X_0, et l'on a

$$\int X_{-1} X_0 \, d\Omega = 4\pi.$$

Considérons, à partir de maintenant, deux points sur la sphère unité P : θ, ψ et P' : θ', ψ'. Soient O le centre de la sphère et γ l'angle des deux rayons OP et OP'.

On démontre que la fonction $X_n(c\gamma)$ des deux points P et P′ est une fonction sphérique d'ordre n, évidemment symétrique par rapport aux deux points, c'est-à-dire aux deux groupes de variable θ, ψ et θ', ψ'. Elle donne lieu aux relations suivantes, Y_m étant toujours une fonction sphérique d'ordre m :

$$(13)\qquad \int Y_m(\theta', \psi')\, X_n(c\gamma)\, d\Omega = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \dfrac{4\pi}{2n+1}\, Y_n(\theta, \psi) & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Proposons-nous, ensuite, de trouver la fonction Y_n du développement d'une fonction donnée f; écrivons

$$f(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{+\infty} Y_n(\theta, \psi).$$

Multiplions par $X_n(c\gamma)$ et intégrons sur la sphère unité, cela donne, en vertu des relations (13),

$$Y_n(\theta, \psi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int f(\theta', \psi')\, X_n(c\gamma)\, d\Omega.$$

Ces propriétés intégrales des fonctions sphériques sont tout à fait fondamentales. Ce sont d'ailleurs les seules dont nous aurons besoin.

12. **Sur les polynomes harmoniques.** — Si l'on développe une fonction harmonique U en série de puissances des variables x, y, z, la somme des termes de degré n est un polynome homogène et harmonique P_n,

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x, y, z).$$

Considérons le polynome homogène de degré n le plus général, il contient $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ coefficients, en exprimant qu'il est harmonique, on écrit $\frac{1}{2}n(n-1)$ relations entre les coefficients, et il reste $2n+1$ coefficients arbitraires. Ce nombre évoque l'idée d'une analogie avec les $2n+1$ fonctions sphériques de degré n. Et, en effet, la correspondance entre coordonnnées, polaires et cartésiennes

$$x = R s\theta c\psi, \qquad y = R s\theta s\psi, \qquad z = R c\theta,$$

permet d'écrire

$$P_n(x, y, z) = R^n\, Y_n(\theta, \psi).$$

La fonction Y_n est une fonction sphérique d'ordre n. A la fonction sphérique la plus générale, dépendant de $2n+1$ coefficients, correspond le polynome harmonique de degré n le plus général et aux $2n+1$ fonctions sphériques fondamentales $2n+1$ polynomes harmoniques fondamentaux. Ces derniers sont linéairement indépendants et orthogonaux sur toute sphère centrée à l'origine.

D'après ces remarques, la résolution du problème de Dirichlet pour la sphère est presque immédiate. On prendra le rayon de la sphère comme unité de longueur, on développera la fonction donnée en une série de fonctions de Laplace

$$f(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{+\infty} Y_n(\theta, \psi),$$

puis on formera la fonction

$$\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n Y_n(\theta, \psi)$$

qui résout le problème. Elle est harmonique pour $R < 1$ et prend les mêmes valeurs que f pour $R = 1$, c'est-à-dire sur la sphère.

Un cas particulier interviendra plus tard : supposons que la fonction f prenne les mêmes valeurs qu'un polynome quelconque $Q(x, y, z)$ de degré m sur la sphère unité. Dans ce cas, la fonction φ est aussi un polynome de degré m

$$\varphi = \sum_{n=0}^{m} P_n(x, y, z).$$

Dans la suite, nous aurons encore à déterminer une fonction harmonique ne dépendant que de z et de x^2+y^2, par les valeurs qu'elle prend sur un segment de l'axe des z. Il faudra, naturellement, que cette succession de valeurs soit fournie par une fonction analytique

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n. \tag{14}$$

La solution, ici encore, existe et est unique. En effet, la fonction harmonique ne dépend pas de la longitude ψ en coordonnées polaires R, θ, ψ, elle est de la forme

$$\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n X_n(\cos\theta), \tag{15}$$

et pour $\theta = 0$, on a $X_n(c\theta) = 1$ et $R = z$ et la fonction se réduit à

$$\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Cette série devant être identique à la série (14), on a $a_n = b_n$, pour toute valeur de n. Cette condition nécessaire est aussi suffisante, la solution (15) existe et est unique.

Enfin, on démontre que si $\varphi(x, y, z)$ est une fonction harmonique, la fonction

$$\frac{1}{R}\varphi\left(\frac{x}{R^2}, \frac{y}{R^2}, \frac{z}{R^2}\right)$$

est encore harmonique, en x, y, z. Comme cas particulier, envisageons les polynomes homogènes et harmoniques $P_n(x, y, z)$.

Ils donnent lieu aux relations suivantes :

$$\frac{1}{R}P_n\left(\frac{x}{R^2}, \frac{y}{R^2}, \frac{z}{R^2}\right) = \frac{1}{R^{2n+1}}P_n(x, y, z) = \frac{Y_n(\theta, \psi)}{R^{n+1}},$$

qui sont autant d'expressions de ce que l'on appelle les polynomes harmoniques inverses.

13. **Une question de convergence et les développements de l'inverse de la distance.** — Écrivons l'identité, facilement vérifiable :

$$1 - 2\lambda c\gamma + \lambda^2 = (1 - \lambda e^{i\gamma})(1 - \lambda e^{-i\gamma}),$$

puis formons le développement suivant les puissances de λ de la puissance $-\frac{1}{2}$ du premier membre. On démontre que le coefficient de λ^n n'est autre que $X_n(c\gamma)$

$$(16) \qquad (1 - 2\lambda c\gamma + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + \lambda X_1(c\gamma) + \lambda^2 X_2(c\gamma) + \ldots.$$

D'autre part, on peut écrire

$$(17) \quad \begin{cases} (1 - \lambda e^{i\gamma})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\lambda e^{i\gamma} + \frac{1.3}{2.4}\lambda^2 e^{2i\gamma} + \ldots, \\ (1 - \lambda e^{-i\gamma})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\lambda e^{-i\gamma} + \frac{1.3}{2.4}\lambda^2 e^{-2i\gamma} + \ldots \end{cases}$$

et la série (16) n'est autre que le produit des deux séries (17) ordonné suivant les puissances de λ.

Or, chaque terme des séries (17) est inférieur ou égal en valeur

absolue au même terme où l'on ferait $\gamma = 0$. La série produit (16) jouit de la même propriété, elle admet donc pour dominante la série

$$(1-\lambda)^{-1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots.$$

On a par conséquent pour $n = 0, 1, 2, \dots$

$$|X_n(c\gamma)| \leq 1,$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $\gamma = 0$, si $n > 0$. La série dominante est convergente pour $0 \leq \lambda < 1$ et uniformément convergente pour $0 \leq \lambda < k < 1$, k étant un nombre aussi voisin de l'unité que l'on voudra. La série (16) jouit des mêmes propriétés de convergence; elle diverge d'ailleurs pour $\lambda = 1$ et $\gamma = 0$ puisque l'on a $X_n(c0) = 1$.

Maintenant, soient : O une origine, puis P et P′ deux points à distance R et R′ respectivement de l'origine; γ l'angle des rayons vecteurs OP et OP′; enfin, r la distance PP′.

Le théorème du cosinus donne

$$r^2 = R^2 + R'^2 - 2RR'c\gamma,$$

d'où, en mettant en évidence le rapport des rayons qui jouera le même rôle que λ,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 - 2\frac{R'}{R}c\gamma + \frac{R'^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R'}\left(1 - 2\frac{R}{R'}c\gamma + \frac{R^2}{R'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Développons ces expressions suivant les puissances du rapport des rayons

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{R'}{R}\right)^n X_n(c\gamma),$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R'}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{R}{R'}\right)^n X_n(c\gamma).$$

La première série est convergente pour $R' < R$, la seconde pour $R' > R$. Elles sont uniformément convergentes, la première si $\frac{R'}{R} < k < 1$, k étant aussi voisin que l'on veut de l'unité mais fixe, la seconde si $\frac{R}{R'} < k < 1$. Les séries divergent pour $R = R'$ et $\gamma = 0$.

14. **Les développements en série du potentiel newtonien.** — Envisageons un potentiel newtonien dû à une matière de densité ρ occupant

un volume V

$$U = \int \frac{\rho}{r} dV.$$

Remplaçons $\frac{1}{r}$ par les développements du paragraphe précédent :

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \int \rho R'^n \quad X_n(c\gamma)\, dV,$$

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n \int \rho \frac{1}{R'^{n+1}} X_n(c\gamma)\, dV.$$

On sait que $X_n(c\gamma)$ est une fonction sphérique d'ordre n par rapport à θ et ψ, comme par rapport à θ' et ψ' et symétrique; R' θ' et ψ' sont les variables d'intégration. Les intégrales des deux dernières expressions de U représenteront donc des fonctions sphériques $Y_n(\theta, \psi)$ et $Z_n(\theta, \psi)$. En définitive, on trouvera

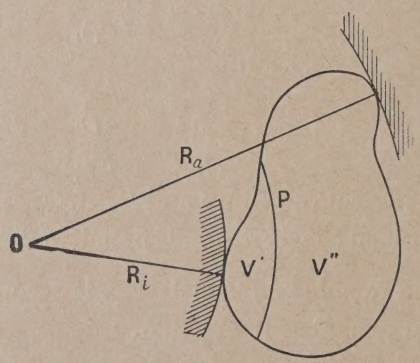
$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{R^{n+1}} Y_n(\theta, \psi), \tag{18}$$

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n \quad Z_n(\theta, \psi). \tag{19}$$

Les termes de la seconde série sont des polynomes harmoniques en x, y, z et les termes de la première des polynomes harmoniques inverses. Ce sont là des développements formels.

Quant à *la question de convergence*, elle appelle les remarques sui-

Fig. 1.



vantes. Si R_i et R_a représentent la plus petite et la plus grande distance de l'origine à la matière donnée, on pourra employer le second

développement (19) pour $o \leq R < R_i$ ce qui exige que R_i ne soit pas nul, c'est-à-dire que l'origine ne soit pas intérieure au volume V. Le premier (18) sera valable pour $R > Ra$. En effet, les développements (18) et (19) peuvent, dans chacun de ces cas, être intégrés terme à terme.

Mais si le point potentié P est à l'intérieur de la matière, il n'est plus possible de représenter U par un seul des développements précédents; il faudrait employer les deux développements à la fois. Le premier (18) pour le domaine V′ où $R' < R$, le second (19) pour le domaine V″ où $R' > R$, domaines qui varient d'ailleurs avec R.

C'est cette difficulté que le procédé uniforme exposé au Chapitre IV évitera systématiquement.

Indiquons enfin les trois premiers termes du potentiel à l'extérieur du corps, dans le cas où ce dernier est de révolution autour de l'axe polaire $\theta = o$ et admet le plan de symétrie $\theta = \frac{\pi}{2}$. En posant

$$x = R\, s\theta\, c\psi, \qquad y = R\, s\theta\, s\psi, \qquad z = R\, c\theta,$$
$$x' = R' s\theta' c\psi', \qquad y' = R' s\theta\, s\psi', \qquad z' = R' c\theta',$$

on trouve

$$c\gamma = \frac{1}{RR'}(xx' + yy' + zz').$$

On peut à partir de là former les différents polynomes $X_n(c\gamma)$. Les expressions $R'^n X_n(c\gamma)$ deviennent des polynomes homogènes de degré n en x', y', z'; tandis que les quantités $\frac{x}{R}$, $\frac{y}{R}$, $\frac{z}{R}$ restent toujours exprimables en θ et ψ. On trouve ainsi à grande distance

$$U = \frac{M}{R} - \frac{C - A}{R^3} X_2(c\theta) + \frac{E - 6F + G}{R^5} X_4(c\theta) + \ldots. \tag{20}$$

La constante M est la masse totale, les constantes A, C, E, F, G sont

$$A = \int \rho(y^2 + z^2)\, dV, \qquad E = \int \rho x^4\, dV, \qquad F = \int \rho x^2 z^2\, dV$$
$$C = \int \rho(x^2 + y^2)\, dV, \qquad G = \int \rho z^4\, dV, \qquad = \int \rho y^2 z^2\, dV.$$

Les deux premières A et C sont des moments d'inertie.

15. Autres expressions du potentiel newtonien et de sa différentielle totale. — Prenons l'expression du potentiel d'une *masse homogène* en un point de coordonnées x, y, z

$$U = \rho \int \frac{1}{r}\, dV$$

et soient x', y', z' les coordonnées du point potentiant. On a

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Donnons aux variables indépendantes x, y, z des accroissements arbitraires dx, dy, dz; la différentielle totale de U s'écrira

$$dU = \rho \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dz \right) dV.$$

On s'assure, en effet, du droit à dériver sous le signe somme. Or, on a

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'};$$

et la différentielle totale de U peut aussi bien s'écrire

$$dU = - \rho \int \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{dx}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{dy}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{dz}{r} \right) \right] dV.$$

Or, l'expression « entre crochets » est une divergence et l'intégrale s'exprime par un flux au travers de la surface S qui limite le volume envisagé. On démontre que la première identité de Green (3) s'étend encore à ce cas, malgré la singularité de $\frac{1}{r}$.

Si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale intérieure au point potentiant, on obtient

$$dU = \rho \int \frac{1}{r} (\alpha \, dx + \beta \, dy + \gamma \, dz) \, dS. \tag{21}$$

Si ds est la longueur du déplacement de composantes dx, dy, dz, et d la direction de ce déplacement, puis n' la direction de la normale intérieure à S, on aura

$$dU = \rho \, ds \int \frac{1}{r} \cos(d, n') \, dS. \tag{22}$$

Cette expression peut être considérée comme l'expression différentielle d'une formule donnée par Gauss

$$U = \frac{1}{2} \rho \int \cos(r, n') \, dS,$$

où (r, n') désigne l'angle que fait n' avec la droite P'P. Je cite cette dernière expression à titre de curiosité, nous n'en aurons pas besoin.

Les dérivées partielles de U se déduisent immédiatement des for-

mules (21) et (22). On a par exemple

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \rho \int \frac{\gamma\, dS}{r}, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \rho \int \frac{1}{r} \cos(dz, n')\, dS, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \rho \int \frac{dx'\, dy}{r}.$$

Ces trois expressions sont équivalentes. Dans la dernière, l'élément $dx'\,dy'$ sera pris positivement ou négativement suivant que le côté intérieur de la portion dS de surface est tourné vers les z positifs, ou vers les z négatifs. En x et y les dérivées seraient analogues.

Considérons ensuite une *masse hétérogène*. On peut évidemment la décomposer en une superposition de masses homogènes. Avec plus de précision, soient S_1, S_2, S_3 une succession de surfaces fermées, régulières, emboîtées les unes dans les autres, puis : V_n le volume limité par S_n et Z_n la zone comprise entre S_n et S_{n+1},. Enfin, soient ρ_1 la densité d'une matière homogène répartie dans Z_1, puis ρ_2 la densité de Z_2, ... On supposera ces densités croissantes. Cette masse hétérogène peut, il est clair, être considérée comme formée du volume V_1 à la densité ρ_1, auquel se superpose une couche de densité $\rho_2 - \rho_1$, remplissant V_2; puis une couche de densité $\rho_3 - \rho_2$ remplissant V_3, etc. Le potentiel s'écrira, en conséquence,

$$U = \rho_1 \int \frac{1}{r} dV_1 + (\rho_2 - \rho_1) \int \frac{1}{r} dV_2 + (\rho_3 - \rho_2) \int \frac{1}{r} dV_3 + \ldots.$$

Enfin, à la limite pour une infinité de couches homogènes infiniment minces, on peut écrire

$$U = \rho_1 \int \frac{1}{r} dV_1 + \int_{\rho_1}^{\rho_0} d\rho \int \frac{1}{r} dV; \tag{22'}$$

ρ_0 est la densité maximum, V le volume limité à la surface régulière S de densité ρ.

Ainsi la matière hétérogène envisagée se présente bien comme une superposition d'un nombre fini ou d'une infinité de masses homogènes. Pour cette masse hétérogène, grâce à l'artifice du début, on pourra écrire

$$\frac{dU}{ds} = \rho_1 \int \frac{1}{r} \cos(d, n'_1)\, dS_1 + (\rho_2 - \rho_1) \int \frac{1}{r} \cos(d, n'_2)\, dS_2 + \ldots;$$

puis, en passant à la limite, le nombre des couches augmentant indéfiniment,

$$\frac{dU}{ds} = \rho_1 \int \frac{1}{r} \cos(d, n'_1)\, dS_1 + \int_{\rho_1}^{\rho_0} d\rho \int \frac{1}{r} \cos(d, n')\, dS.$$

Les dérivées partielles sont à leur tour

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \rho_1 \int \frac{dx'\,dy'}{r} + \int_{\rho_1}^{\rho_0} d\rho \int \frac{dx'\,dy'}{r}. \tag{23}$$

Les formules sont analogues pour les deux autres dérivées. La première intégrale est étendue à S_1 et la dernière en x', y' est étendue à la surface S de densité ρ.

Les transformations précédentes sont légitimes si la densité est régulière au sens faible et si les surfaces S sont formées d'un nombre fini de portions régulières. Cependant, la frontière de l'ensemble, où la densité est ρ_0, peut être absolument quelconque.

Si la densité subissait un saut $\rho' \to \rho''$ sur une surface fermée, régulière, intérieure à la masse, l'élément $d\rho$ devrait être remplacé par $\rho'' - \rho'$ pour cette surface-là.

CHAPITRE II.

ÉQUILIBRE RELATIF ET ROTATIONS PERMANENTES.

16. Les équations de l'hydrodynamique. — Considérons un fluide parfait, c'est-à-dire sans viscosité, et détachons par la pensée une particule infiniment petite de centre x, y, z et d'accélération γ_x, γ_y, γ_z. Soient ρ la densité, et p la pression rapportée à l'unité de surface, puis X, Y, Z les projections de la résultante des forces extérieures rapportées à l'unité de volume. Les équations bien connues qui régissent le mouvement de la particule s'écrivent

$$(24) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \gamma_x, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \gamma_y, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \gamma_z.$$

A ces trois équations, on adjoint habituellement deux relations : l'équation caractéristique

$$(25) \qquad F(\rho, p, \tau) = 0,$$

dans laquelle τ est la température, et l'équation de continuité

$$(26) \qquad \rho = D\rho_0,$$

où D est le coefficient de dilatation cubique, et ρ_0 la densité au point que la particule occupait initialement.

Mais, l'équation de continuité n'interviendra qu'exceptionnellement dans ce livre, car les mouvements étudiés, une simple rotation par exemple, seront toujours tels que la densité d'une particule reste constante au cours du temps, et le coefficient D sera toujours égal à l'unité.

Quant à l'équation caractéristique, elle ne s'applique, sous la forme (25), que si le fluide est chimiquement homogène, par exemple s'il s'agit d'un seul fluide compressible. Les fluides considérés ici peuvent être constitués au contraire par plusieurs ou même une infinité de fluides chimiquement différents. De sorte que, si l'on voulait tenir compte d'une équation caractéristique, il faudrait l'écrire, avec M. Dive,

$$F(\rho, p, \tau, \lambda) = 0,$$

où le paramètre λ caractériserait la nature chimique de chacun des fluides envisagés.

Il y a plus; nous verrons que dans des cas assez généraux, la densité et la pression seront liées par une relation

$$\rho = f(p),$$

indépendante de la température, et cela à cause de la nature même du mouvement et non pas en vertu d'une équation caractéristique donnée à l'avance.

Pour les étoiles pulsantes nous écririons, d'ailleurs,

$$\rho = f(p, t)$$

où t est le temps.

L'équation de continuité et l'équation caractéristique ne joueront donc ici qu'un rôle secondaire. Mais, *pour des raisons de stabilité, nous admettrons que la densité ne diminue pas quand la pression augmente.*

Supposons, maintenant, que les forces extérieures se réduisent à des attractions newtoniennes dérivant d'un potentiel $U(x, y, z, t)$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Les équations fondamentales (24) s'écrivent, dans ce cas particulier,

$$(27) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \gamma_x, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \gamma_y, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma_z.$$

Jointes aux équations (25) et (26) elles régissent le mouvement le plus général d'un seul fluide parfait dans un champ newtonien.

17. **Équilibre relatif.** — Envisageons un fluide qui tourne tout d'une pièce, avec une vitesse angulaire constante ω, autour de l'axe OZ supposé fixe. L'accélération de chaque particule est dirigée vers le centre du cercle trajectoire et l'on a, c'est bien connu,

$$\gamma_x = -\omega^2 x, \qquad \gamma_y = -\omega^2 y, \qquad \gamma_z = 0.$$

Les seconds membres changés de signe constituent les composantes de la force centrifuge. Les équations qui terminaient le paragraphe précédent s'écrivent maintenant

$$(28) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

en coordonnées d'Euler par rapport à un système d'axes solidaire du fluide.

Introduisons le potentiel de la force centrifuge $Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ et posons

$$\Phi = U + Q,$$

Φ sera appelé « potentiel du champ de la pesanteur » et les équations (28) s'écriront

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{29}$$

Enfin, en multipliant par dx, dy, dz et en additionnant, on trouve

$$\frac{1}{\rho}\,dp = d\Phi. \tag{30}$$

De cette équation qui résume les trois relations (29) et qui leur est équivalente, on déduit habituellement les conséquences suivantes.

Si, pour un déplacement du point x, y, z le long d'une ligne ou d'une surface, p reste constant, alors Φ reste constant, car $dp = 0$ entraîne $d\Phi = 0$ et réciproquement.

Les surfaces d'égale pression et d'égal potentiel Φ *coïncident*, d'où

$$p = p(\Phi) \qquad \text{et} \qquad \Phi = \Phi(p)$$

Puis, l'équation (30) prend la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\Phi}{dp}, \qquad \text{d'où } \frac{1}{\rho} = \Phi'(p).$$

La densité, elle aussi, ne dépend donc que de la pression, ce qui se formule encore par la relation

$$\rho = f(p).$$

Les surfaces d'égale densité et d'égale pression coïncident.

Nous appellerons *surfaces de niveau* les surfaces d'égale pression.

Ces propositions, au point de vue de la rigueur, exigent quelques remarques qui pourront être omises en première lecture.

18. **Remarques.** — 1° Dans un fluide homogène, toute surface sur laquelle la densité est constante n'est pas d'égale pression.

2° Dans le cas de deux fluides distincts et distants, étoile double par exemple, la densité sur la surface libre $p = 0$ du premier astre peut avoir une autre valeur que la densité sur la surface libre $p = 0$ de l'astre jumeau. Le potentiel Φ peut différer aussi. Quoique les fonctions $p(x, y, z)$, $\Phi(x, y, z)$ et $\rho(x, y, z)$ soient

univoques, les fonctions

$$p = p(\Phi), \qquad \Phi = \Phi(p), \qquad \rho = f(p)$$

ne sont pas forcément univoques.

Cette remarque s'applique à l'intérieur d'un fluide d'un seul tenant. Il n'est pas exclu, en effet, que les surfaces d'égale pression de connexion sphérique au voisinage de la surface libre tendent vers la forme d'une haltère quand p augmente, puis s'étranglent, se scindent et donnent ensuite deux familles distinctes F_1 et F_2 de surfaces emboîtées tendant vers deux points différents ou deux ensembles différents de pression maximum. Dans une telle stratification, en l'absence d'équation caractéristique donnée, il n'est pas exclu que l'on ait sur une surface de F_1 et sur une surface de F_2 : $p_1 = p_2$, $\Phi_1 \neq \Phi_2$, $\rho_1 \neq \rho_2$. Il convient donc de préciser un peu.

Les ensembles d'un seul tenant; lignes, surfaces, domaines, sur lesquels Φ est constant, sont à p constant et réciproquement; car $dp = 0$ implique $d\Phi = 0$. Les surfaces $\Phi = c$ coïncident avec les surfaces de niveau.

Les dérivées partielles de Φ existent et sont continues dans toute la masse, la fonction Φ est donc régulière au sens faible et les surfaces de niveau sont régulières en tous points où la pesanteur n'est pas nulle.

Envisageons maintenant une couche de niveau S telle que, d'un côté au moins, le potentiel Φ varie. Alors, en chaque point de S, le rapport $\frac{d\Phi}{dp}$ est bien déterminé et sa valeur $\frac{1}{\rho}$ ne dépend que de p. De sorte que, sur une couche à p constant, ρ est constant. Ainsi, il est juste de dire que la densité est constante sur une surface de niveau.

3° Sans vouloir subtiliser à l'infini, il est utile, en particulier pour démontrer l'existence d'un plan de symétrie, d'introduire les notions suivantes qui permettent de préciser encore les énoncés du paragraphe précédent.

Envisageons un fluide, tout entier à distance finie, réparti en un ou plusieurs volumes distincts et séparés.

Soient :

M_p l'ensemble des points où la pression est supérieure ou égale à p;
M_ρ l'ensemble des points où la densité est supérieure ou égale à ρ;
M_Φ l'ensemble des points où le potentiel est supérieur ou égal à Φ.

Ces ensembles sont emboîtés, c'est-à-dire que $M_{\rho'}$ fait partie de $M_{\rho''}$ si $\rho' > \rho''$. Il en est de même des autres.

Appelons : S_ρ la frontière de M_ρ; S_p la frontière de M_p; S_Φ la frontière de M_Φ.

Les frontières S_p et S_Φ sont à pression p et à potentiel Φ respectivement, cela se démontre très facilement, car les fonctions p et Φ de x, y, z s nt continues.

Si la densité varie d'une manière continue les frontières S_ρ sont à densité ρ, sans ambiguïté possible.

Un domaine où ρ est constant sera caractérisé par l'absence de frontière S_ρ dans ce domaine.

Nous supposerons ces frontières formées d'un nombre fini de surfaces régulières; cependant aucune supposition n'est faite sur les ensembles où la densité atteint

un maximum absolu ou relatif, ils pourront être quelconques ainsi que leur frontière.

Ces définitions posées, voici ce que l'on peut affirmer :

Une frontière S_p coïncide toujours avec une frontière $S\Phi$;
Une frontière $S\Phi$ coïncide toujours avec une frontière S_p;
Une frontière S_ρ coïncide toujours avec une frontière S_p;
Une frontière S_ρ coïncide toujours avec une frontière $S\Phi$.

4° Tandis que le potentiel Φ et la pression sont des fonctions continues, la densité pourra subir des sauts brusques sur un nombre fini de surfaces fermées intérieures à l'astre. Sur la surface libre, cette particularité se présente toujours, à moins que la densité n'y soit nulle. Sur les surfaces de saut elles-mêmes, nous conviendrons de donner à la densité sa plus grande valeur.

19. **Mouvements généraux et pesanteur généralisée.** — Les équations du mouvement d'un fluide parfait dans un champ newtonien fixe ou variable dérivant d'un potentiel $U(x, y, z, t)$ s'écrivent

$$(31)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \gamma_x, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \gamma_y, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma_z.$$

Les seconds membres ne sont autres que les composantes, suivant les axes fondamentaux, de la résultante $\vec{g}$ de l'attraction et de l'accélération renversée. On peut appeler ce vecteur la « pesanteur généralisée » et poser

$$(32)\qquad g_x = \frac{\partial U}{\partial x} - \gamma_x, \qquad g_y = \frac{\partial U}{\partial y} - \gamma_y, \qquad g_z = \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma_z.$$

Si $\vec{A}$ désigne la résultante des attractions newtoniennes s'exerçant sur une masse unité et $\vec{\gamma}$ l'accélération, on a donc géométriquement

$$\vec{g} = \vec{A} - \vec{\gamma}.$$

Les équations (31) peuvent s'écrire, en introduisant la pesanteur :

$$(33)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g_x, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = g_y, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = g_z.$$

Des relations (33) on déduit facilement les conséquences suivantes : le vecteur pesanteur $\vec{g}$ est normal aux surfaces d'égale pression et il est dirigé du côté où la pression augmente, si dn est l'élément de normale dirigé dans ce sens-là, on a

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dn} = g,$$

où g est l'intensité de la pesanteur. Ensuite, les équations fondamentales,

multipliées par les composantes d'un déplacement arbitraire, donnent

$$\frac{1}{\rho} dp = g_x\, dx + g_y\, dy + g_z\, dz. \tag{34}$$

De cette relation, on déduit l'*équivalence* des trois propositions suivantes, j'entends que si l'une est vraie, les autres le sont aussi :

1° Il existe un potentiel du champ de la pesanteur;

2° Il existe un potentiel des accélérations;

3° Les couches d'égale pression coïncident avec les couches d'égale densité;

4° La pesanteur est normale aux surfaces d'égale densité.

Il est bien entendu que, par « surface d'égale densité », nous entendons une surface régulière sur laquelle la densité est constante, mais croît ou décroît quand on traverse la surface dans un certain sens. Cette précision nous dispensera, aux yeux du lecteur, de revenir ici sur les subtilités du paragraphe 18.

Nous appellerons *mouvement de genre un* ou *barotropes*, ceux pour lesquels ces propositions sont vraies, et *mouvements de genre deux* ou *baroclines*, ceux pour lesquels elles ne sont pas vraies. Puisqu'elles sont équivalentes, on peut dire que les mouvements de genre un sont caractérisés par l'existence d'un potentiel de la pesanteur, et les mouvements de genre deux, par son inexistence.

Prouvons l'équivalence des propositions ci-dessus.

Montrons d'abord que la proposition 1° entraîne les trois autres et que, réciproquement, chacune des trois autres entraînent la proposition 1°. Cela suffira à prouver l'équivalence de deux quelconques de ces propositions.

Si 1° est vrai, l'on a

$$g_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad g_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad g_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Les dérivées partielles et les différentielles totales seront toujours prises à t constant.

Les équations (32) montrent que $U - \Phi$ est un potentiel des accélérations, donc 2° est vraie. L'équation (34) s'écrit

$$\frac{1}{\rho} dp = d\Phi. \tag{35}$$

Un déplacement sur une surface à Φ constant donne $d\Phi = 0$, d'où $dp = 0$, la pression est constante sur les surfaces de niveau $\Phi = c$. On

peut écrire

$$\Phi = \Phi(p, t), \qquad p = p(\Phi, t).$$

L'équation (35) devient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial p}.$$

La densité est constante sur les surfaces à pression constante. D'où

$$\rho = f(p, t).$$

Enfin, la pesanteur, toujours normale aux surfaces d'égale pression, est normale aux surfaces d'égale densité.

Réciproquement, s'il existe un potentiel Γ des accélérations, la fonction U — Γ est un potentiel de la pesanteur.

Si la proposition 3° est vraie, on peut écrire : $\rho = f(p, t)$. Formons alors l'intégrale indéfinie

$$\Phi(p) = \int \frac{dp}{f(p, t)},$$

et l'équation (34) devient

$$d\Phi = g_x\, dx + g_y\, dy + g_z\, dz;$$

mais, considérée comme fonction de x, y, z, la différentielle $d\Phi$ est une différentielle totale exacte et l'on a

$$g_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad g_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad g_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

Φ est bien un potentiel de la pesanteur. Enfin, si la pesanteur est normale aux surfaces d'égale densité, un déplacement sur une de ces surfaces donne par (34) : $dp = 0$, d'où $p = c$, et l'on retrouve la proposition 3°. L'équivalence des propositions 1°, 2°, 3° et 4° est bien établie. Ces propositions subsistent si la force X, Y, Z dérive d'un potentiel quelconque au lieu d'un potentiel newtonien.

20. **Les rotations permanentes.** — Considérons un fluide et un axe fixe Δ, puis les circonférences perpendiculaires à Δ et centrées sur cet axe. Ce fluide sera dit en « rotation permanente » autour de Δ si toutes les particules situées sur une même circonférence ont la même densité et décrivent cette courbe avec une même vitesse indépendante du temps.

La vitesse angulaire pourra varier d'une circonférence à une autre. Si OZ est l'axe de rotation et l le rayon d'une circonférence, la vitesse

angulaire sera fonction univoque de z et de l,

$$\omega = \omega(z, l).$$

Les différentes molécules qui se succèdent en un même point de l'espace ont donc même vitesse et même densité. Le mouvement est permanent au sens de la mécanique des fluides.

Cette définition est purement cinématique. L'accélération d'une particule est dirigée vers le centre du cercle trajectoire et vaut en grandeur $\omega^2 l$. Ses projections sur les axes sont donc

$$-\omega^2 x, \quad -\omega^2 y, \quad 0.$$

L'accélération renversée définit une force centrifuge, de composantes

$$\omega^2 x, \quad \omega^2 y, \quad 0.$$

Si le mouvement est de genre un, on dira *que la rotation est barotrope*. Il existe, alors, un potentiel des accélérations : Γ

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = -\omega^2 x, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = -\omega^2 y, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0.$$

La dernière équation montre que Γ ne saurait dépendre de z, mais alors, ω n'en dépend pas non plus, les deux premières le prouvent.

Pour une rotation barotrope, la vitesse angulaire ne dépend que de la distance à l'axe de rotation.

Réciproquement, si la vitesse angulaire ne dépend que de la distance à l'axe, la rotation est de genre un. La fonction

$$\Gamma = -\frac{1}{2}\int_0^{l^2} \omega^2(l^2)\, dl^2$$

est, en effet, un potentiel des accélérations, ce qui entraîne l'existence d'un potentiel de la pesanteur.

Pratiquement, il est plus simple d'introduire le potentiel de la force centrifuge Q sous la forme

$$Q = \frac{1}{2}\int_0^{l^2} \omega^2(l^2)\, dl^2.$$

Si l'astre est en équilibre relatif $\omega = c$, on retrouve l'ancienne forme $Q = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$.

Dans ce livre, nous nous occuperons principalement des rotations barotropes; elles présentent une grande analogie avec l'équilibre relatif.

Au point de vue analytique, les rotations permanentes du premier

genre sont caractérisées par les équations équivalentes :

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \qquad \rho = f(p).$$

D'autre part, le potentiel du champ de la pesanteur s'écrit

$$\Phi(p) = \int_0^p \frac{dp}{f(p)}.$$

Il ne dépend que de la pression p tandis que le potentiel de la force centrifuge ne dépend que du carré de la distance à l'axe l

$$Q(l^2) = \frac{1}{2}\int_0^{l^2} \omega^2(l^2)\, dl^2.$$

Ces choses si simples n'ont pas toujours été remarquées et quelques auteurs ont considéré comme nécessaire que le champ de la pesanteur soit normal aux surfaces d'égale densité sans s'apercevoir que, dans ce cas, ces surfaces coïncident avec les surfaces à pression constante, et que l'on a par conséquent $\rho = f(p)$ et un mouvement de genre un.

L'équation $\Phi = U + Q$ résume encore ici les trois équations du mouvement. Elle leur est équivalente et puisque Φ ne dépend que de p et p que de ρ, on peut écrire

$$\Phi(\rho) = U + Q(l^2). \tag{36}$$

Le potentiel de la pesanteur devra conserver la même valeur sur les surfaces d'égale densité.

M. Dive a prouvé la possibilité des *rotations baroclines* ou *de genre deux* qu'il a étudiées d'une manière approfondie, par une très belle méthode totalement différente de la nôtre.

Remarque. — Le potentiel newtonien pourra être créé par la ou les masses fluides elles-mêmes, ou bien encore, par des corps extérieurs au système des masses fluides dont on cherche la configuration.

21. La méthode de M. Dive. — Je n'indique ici que le point de départ des remarquables recherches de M. Dive [1] sur les rotations permanentes baroclines. Le potentiel de la pesanteur n'existe plus, mais l'équation fondamentale (34) peut s'écrire

$$dp = \rho[dU + \omega^2(x\,dx + y\,dy)]. \tag{37}$$

Le premier membre est une différentielle totale, il doit en être de

[1] P. Dive, *Rotations internes des astres fluides, Thèse*, Paris, 1930. Voir aussi *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, t. 194, 1932, p. 58.

même du second. M. Dive envisage une répartition des masses qui détermine ρ et U. Il cherche ensuite à déterminer la fonction $\omega^2(x, y, z)$ de telle manière que la densité devienne facteur intégrant du crochet de la formule précédente. Il montre enfin que certaines répartitions de matière, ellipsoïdales ou annulaires, donnent lieu à des rotations baroclines.

En coordonnées ρ, l on trouve, ρ_1 étant la densité superficielle,

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho l}\left[\int_{\rho}^{\rho_1}\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_{\rho} d\rho - \rho_1\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_{\rho_1}\right].$$

On cherche, ainsi, de quelle vitesse il faut animer les différentes particules pour que le fluide conserve sa structure initiale.

La répartition des matières ne sera plus soumise qu'à certaines inégalités, provenant, par exemple, du fait que ω^2 ne peut être négatif. La méthode de M. Dive permet de formuler des relations entre les variations de la vitesse angulaire et la répartion des masses *pour toute rotation permanente*.

22. **Extension d'une équation de Poincaré.** — Reprenons l'équation (36) et faisons agir l'opérateur de Laplace,

$$\Delta\Phi = \Delta U + \Delta Q.$$

Mais l'équation de Poisson permet de transformer ΔU et la relation précédente devient

$$\Delta\Phi = -4\pi i\rho + \Delta Q,$$

où i est la constante de l'attraction universelle. Intégrons les deux membres de cette équation dans le volume V occupé par le fluide,

$$\int \Delta\Phi\, dV = -4\pi i \int \rho\, dV + \int \Delta Q\, dV. \tag{38}$$

$\Delta\Phi$ est la divergence du gradiant de Φ et la formule (4), ou deuxième identité de Green, permet de remplacer la première intégrale par l'intégrale de $\frac{d\Phi}{dn}$ étendue à la surface S qui limite le fluide. Cette dérivée normale n'est autre que l'intensité de la pesanteur g. La seconde intégrale de la formule (38) n'est autre que la masse totale M du fluide et l'on trouve

$$\int g\, dS = +4\pi i M - \int \Delta Q\, dV. \tag{39}$$

Cette équation est valable pour toute rotation de genre un.

Un calcul simple donne

$$\Delta Q = 2\omega^2 + 2l^2 \frac{d\omega^2}{dl^2}.$$

Si le fluide est en équilibre relatif, ω est constant et ΔQ a la valeur $2\omega^2$. Alors si V désigne le volume lui-même, l'équation (38) prend la forme

$$\int g\, dS = +4\pi i M - 2\omega^2 V.$$

C'est *l'équation de Poincaré*. Remarquant que g n'est jamais négatif sur S, sans quoi les particules quitteraient cette surface, Poincaré en déduit que l'on a

$$\frac{M}{V} \geq \frac{\omega^2}{2\pi i}. \tag{39'}$$

Le rapport de la masse au volume n'est autre que la densité moyenne ρ_{moy} et la relation (39) s'écrit $\rho_{moy} \geq \frac{\omega^2}{2\pi i}$. M. Crudeli a prouvé que si S est une surface convexe, on peut affirmer une inégalité plus restrictive : $\omega^2 < \pi i \rho_{moy}$. De l'équation (38) on déduit la relation suivante, valable pour tout mouvement de genre un,

$$\int \Delta Q\, dV \leq 4\pi i M.$$

Pour l'équilibre relatif la limitation de ω vient d'être reprise par différents auteurs (1).

23. **Extension du théorème de M. Lichtenstein.** — M. Lichtenstein (2) a fait connaître un théorème de la plus haute importance : *une masse fluide dont toutes les particules s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton, et qui se trouve en état d'équilibre relatif, présente un plan de symétrie droite perpendiculaire à l'axe de rotation.*

Le fluide pourra être réparti en plusieurs masses, à l'intérieur de chacune la densité sera supposée régulière au sens faible.

Les ensembles où la densité atteint un maximum absolu ou relatif peuvent être quelconques; mais les autres couches d'égale densité seront supposées formées d'un nombre fini de surfaces régulières au sens faible. Enfin, nous admettons que la densité ne décroît pas quand la pression augmente.

---

(1) Nikliborc, *Ein Satz über die Winkelgeschwindigkeit der Gleichwichtsfiguren* (*Mathematische Zeitschrift*, B. 31, H. 2 et 3, 1929). — Crudeli, *Velocita angolare e schiacciamento delle figure di equilibrio dei fluidi rotanti* (Coop. Tipografica Azzoguidi, Bologna, 1930).

(2) *Mathematische Zeitschrift*, B. 28, H. 4, 1928.

Je tiens à dire que les raisonnements mis en œuvre dans les pages suivantes sont, à peu de choses près, ceux de M. Lichtenstein, quoique les hypothèses transcrites ci-dessus soient d'une autre nature et que nous visions le cas général des rotations barotropes. M. Plancherel a, lui aussi, donné une démonstration très remarquable du théorème pour l'équilibre relatif, il nous l'a communiquée dans une lettre.

L'axe de rotation est l'axe des z et, pour simplifier, nous appellerons le z d'un point « la hauteur de ce point ».

La démonstration sera délicate, en voici tout d'abord *le fil conducteur*.

Nous envisagerons les cordes parallèles à Oz de toutes les surfaces d'égale densité et l'ensemble des milieux de ces cordes. La borne supérieure des hauteurs de ces milieux sera appelée z_0. Si le plan de symétrie n'existe pas, c'est que toutes les cordes ne sont pas à hauteur z_0.

1° On montre alors qu'à une hauteur supérieure à $z_0 - \varepsilon$, ε étant fixe, la pesanteur serait dirigée vers le bas, la densité ne diminuerait pas vers le bas et, par conséquent, au-dessus de $z_0 - \varepsilon$ il ne pourrait exister d'extrémité inférieure d'une corde. Une corde de longueur nulle, cas de tangence par exemple, à hauteur z_0 serait donc impossible.

2° Ensuite on prouve qu'une corde de longueur non nulle centrée à hauteur z_0 serait encore impossible. Il n'y aurait donc pas de corde dont le centre soit à hauteur z_0.

3° En vertu de la définition de la borne supérieure, il devrait alors exister une suite de cordes dont les centres tendent vers la hauteur z_0. Par le principe de l'extraction des suites, on prouve que cela entraînerait l'existence d'une corde dont le centre serait à hauteur z_0, ce qui nous fait retomber dans la contradiction. Il faut donc admettre que toutes les cordes ont leur centre à même hauteur, c'est-à-dire qu'il y a un plan de symétrie.

Démonstration. — Soient ρ_+ la densité la plus faible et ρ^+ la densité la plus forte. Soit enfin, M_ρ l'ensemble des points où la densité est supérieure ou égale à ρ.

On démontre aisément que la frontière S_ρ de M_ρ est à densité ρ et que les ensembles M_ρ sont fermés. Les frontières S_ρ sont les couches d'égale densité. Les ensembles de densité maximum $M_{\rho'}$ sont caractérisés par le fait qu'ils ne contiennent pas d'autres $M_{\rho''}$ avec $\rho'' > \rho'$. Considérons une parallèle à l'axe Oz de coordonnées x, y. Nous appellerons corde relative à x, y un segment de cette parallèle dont les points font tous partie de M_ρ, les extrémités étant sur S_ρ; nous entendons que la corde

n'est pas prolongeable dans ces conditions, cas, par exemple, où le segment appartiendrait tout entier à une frontière S_ρ. Il peut y avoir plusieurs cordes relatives à un même M_ρ et sur une même parallèle, et des cordes de longueur nulle, cas de tangence par exemple.

Envisageons maintenant l'ensemble des milieux z de toutes les cordes relativement à toutes les valeurs de ρ et à toutes les parallèles x, y.

Soit z_0 la borne supérieure des hauteurs z des milieux des cordes. On aurait, au moins, pour une corde $z < z_0$.

1° A hauteur z_0 la pesanteur serait dirigée vers le bas.

En effet, on a

$$g_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{40}$$

Il suffira de montrer que cette dernière dérivée serait négative à hauteur z_0. On peut écrire, en vertu des résultats du paragraphe 15, formule (23),

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \rho_+ \int \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) dx\, dy + \int_{\rho_+}^{\rho^+} d\rho \int \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) dx\, dy, \tag{41}$$

où r' est la distance d'un point fixe quelconque à hauteur z_0 à l'extrémité inférieure d'une corde de coordonnées x, y; r'' la distance à l'extrémité supérieure. S'il y a plusieurs cordes sur une même parallèle, on fera une sommation préalable des parenthèses avant d'intégrer en x, y. On a toujours $z_0 \geqq z$ et par conséquent $r' \geqq r''$, d'où

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \leqq 0.$$

Mais l'inégalité serait valable pour une corde au moins et par conséquent pour le voisinage de cette corde, de telle manière que les parenthèses négatives contribueraient dans l'intégrale et donneraient $g_z < 0$ à hauteur z_0. La fonction g_z étant continue dans l'espace entier, on peut même affirmer qu'elle serait encore négative jusqu'à la hauteur $z_0 - \varepsilon$, ε étant un nombre positif suffisamment petit. Or, l'équation (40) montre que la pression augmenterait vers le bas à hauteur supérieure à $z_0 - \varepsilon$. La densité ne diminuerait pas vers le bas au-dessus de $z_0 - \varepsilon$ sur toute parallèle à l'axe des z. Si un point d'un tel segment appartient à un M_ρ, de ce point jusqu'à la hauteur $z_0 - \varepsilon$ le segment de parallèle est encore tout entier dans M_ρ. Il n'y aurait pas de corde qui ait son extrémité inférieure au-dessus du plan $z_0 - \varepsilon$; et en particulier pas de corde nulle.

2° Si un point P_0 à hauteur z_0 est centre d'une corde P^1, P^2 de lon-

gueur non nulle, le potentiel U ne pourrait reprendre la même valeur en P^1 et en P^2. On aurait, en effet, par la formule (22′) du paragraphe 15,

$$(42) \qquad U(P^1) - U(P^2) = \rho_+ \int dx\,dy \int_{z'}^{z''} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) dz + \int_{\rho_+}^{\rho^+} d\rho \int dx\,dy \int_{z'}^{z''} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) dz;$$

z' et z'' étant les hauteurs des extrémités d'une corde x, y; r_1 et r_2 les distances des points P^1 et P^2 à un point de cette corde. S'il y a plusieurs cordes sur une même parallèle, il faudra additionner les intégrales en z avant de sommer en x, y.

On vérifie que les intégrales en z ne seraient jamais positives puisque la corde P^1, P^2 serait, en moyenne, plus élevée ou à même hauteur que la corde z', z''. Il y a même une intégrale négative et, encore ici, celles de son voisinage contribueront à rendre les intégrales en x, y négatives. On aurait donc

$$U(P^1) - U(P^2) < 0.$$

Il y a là une absurdité, car le potentiel Φ reprend la même valeur en P^1 et P^2 puisque ces deux points sont sur une même surface $S\rho$; il en est de même du potentiel Q qui est constant sur toute la corde $P_1 P_2$ et l'on a

$$\Phi(P^1) = U(P^1) + Q(P^1),$$
$$\Phi(P^2) = U(P^2) + Q(P^2).$$

Il ne saurait donc exister de corde de longueur non nulle dont le centre fût à hauteur z_0.

1° et 2° En résumé il ne saurait exister de corde dont le milieu fût à hauteur z_0.

3° La définition de z_0, en tant que borne supérieure, implique alors l'existence d'une suite infinie de cordes distinctes dont les centres tendent vers le plan z_0. Ces centres auront un point d'accumulation P_0 à distance finie, à hauteur z_0; cela en vertu du théorème de Bolzano. On peut alors extraire de la suite une nouvelle suite de cordes dont les centres P_n tendent vers P_0

$$P_0 = \lim_{n \to +\infty} P_n.$$

De cette suite, on peut extraire une nouvelle suite, telle que les extrémités inférieures des cordes tendent vers un point $P^1(x_0, y_0, z_0 - h)$, et l'on aurait $h \geq \varepsilon$. Les extrémités supérieures tendent vers le point

$P^2(x_0, y_0, z_0+h)$. Appelons de nouveau n l'indice de cette suite. Le segment P^1, P^2 serait donc de longueur non nulle et centré dans le plan z_0. Il suffira de faire voir que ce segment est bien une corde pour retomber dans la contradiction précédente et il n'y aura plus d'échappatoire.

La densité est la même en P_n^1 et P_n^2; soit ρ_n cette densité. Soient, en plus : ρ^1 et ρ^2 les densités en P^1 et P^2. Puisque l'on a $P^1 = \lim P_n^1$ et $P^2 = \lim P_n^2$ on peut encore écrire $\rho^1 = \lim \rho_n$, $\rho^2 = \lim \rho_n$, car la densité est une fonction continue. Mais ces deux dernières limites n'en forment qu'une seule. Posons maintenant $\rho^1 = \rho^2 = \rho_0$. Les points P_n^1 et P_n^2 appartiennent aux frontières $S\rho_n$. Les points P^1 et P^2 sont sur des frontières; en effet, sans cela, ils seraient dans des domaines d'homogénéité, qui ne contiennent, on le sait, aucune frontière, et les points P_n^1 et P_n^2 ne pourraient pas s'en approcher. Cette frontière est $S\rho_0$. Je dis maintenant que le segment P^1, P^2 est bien une corde de $S\rho_0$.

En effet, s'il existait un point P^3 du segment P^1, P^2 qui ne fût pas dans M_{ρ_0}, il existerait une corde P^4, P^2 telle que $P^1 < P^3 < P^4 \leq P^2$; mais cette corde aurait son centre au-dessus de z_0 milieu de P^1, P^2. Ce qui n'est pas possible. C. Q. F. D.

Si la densité pouvait subir un saut $\Delta\rho$ sur un nombre fini de surfaces régulières, la nécessité du plan de symétrie subsisterait. Mais les formules (41) et (42) contiendraient des termes en $\Delta\rho$ et le raisonnement 3° devient plus délicat. Pour des raisons de simplicité, nous avons préféré admettre la régularité au sens faible de la densité dans toutes les masses fluides.

24. **Autres propriétés.** — Le paragraphe précédent a montré l'existence d'un même plan de symétrie pour toutes les surfaces d'égale densité d'une masse fluide hétérogène en rotation permanente de genre un, qui n'est soumise qu'à l'attraction newtonienne de ses particules et en l'absence de tout corps étranger. Nous savons encore que l'attraction newtonienne est différente de zéro, sauf en certains points du plan de symétrie.

M. Lichtenstein a déduit de son théorème les conséquences suivantes qui sont d'une très grande importance et s'étendent aux rotations de genre un.

1° Il est impossible que la masse fluide se compose de plusieurs morceaux situés « au-dessus » l'un de l'autre; ils seraient « à côté » les uns des autres; cela résulte de ce que toute corde est dans le plan de symétrie.

2° La pesanteur ne pouvant s'annuler que dans le plan de symétrie, ailleurs on a $g_z = \frac{\partial U}{\partial z} \neq 0$, les surfaces de niveau sont donc régulières, sauf peut-être dans ce plan où elles pourraient admettre des arêtes, des points coniques, etc.

3° S'il y a repos absolu, l'axe de rotation est indéterminé et il doit y avoir plan de symétrie relativement à toute direction. Il n'y a que les sphères qui puissent jouir de cette propriété.

Une masse au repos est donc composée de sphères concentriques.

La démonstration de Liapounoff était relative au cas spécial d'une figure d'équilibre stable d'une masse homogène au repos (¹).

Enfin, les propositions suivantes sont immédiates :

4° Une figure étant donnée, une infinité s'en déduit en multipliant les densités par une constante λ et la vitesse angulaire par $\sqrt{\lambda}$.

5° On peut aussi faire une homothétie, la densité restant la même aux points homologues.

6° Ces transformations laissent invariable l'expression, où t_1 est une des dimensions de l'astre, son rayon polaire par exemple :

$$\frac{\omega^2 t_1^3}{iM}.$$

Cette quantité est en plus sans dimension physique; c'est elle qui caractérisera la tendance de la planète à s'aplatir.

25. **Extension du théorème de Stokes.** — Le théorème de Stokes se formule ainsi : *le potentiel à l'extérieur de l'astre est entièrement déterminé par la surface libre* S, *la vitesse angulaire* ω *et la masse totale* M. Symboliquement,

$$U = F[S, \omega, M]; \quad E;$$

la lettre E rappelle qu'il s'agit de l'extérieur de l'astre. S'il existe différentes répartitions de matière qui conservent les éléments S, ω, M, elles créent le même champ newtonien en dehors de S.

C'est par le principe de Dirichlet pour le problème extérieur que Poincaré et Tisserand démontrent ce théorème. Voici d'ailleurs la remarque qui y conduit inductivement : sur la surface libre, le potentiel de la pesanteur doit être constant, soit Φ_S sa valeur; on a donc

$$U = \Phi_S - Q;$$

(¹) *Voir* POINCARÉ, *Figures d'équilibre*, p. 13-22.

mais si l'on suppose connus Φ_S et ω, U est donc connu sur la surface libre. Devant être nul à l'infini et harmonique à l'extérieur, le potentiel newtonien U est donc entièrement déterminé à l'extérieur de S. Ensuite, on montre que la constante Φ_S est entièrement déterminée par la masse totale.

Nous préférons suivre une méthode différente. Nous emploierons certaines transformations qui, généralisées plus tard, conduiront au procédé uniforme.

Supposons connues la masse totale M, la vitesse angulaire et ses variations $\omega(l)$, ainsi que la surface libre S. L'équation de Poisson, pour le champ de la pesanteur, peut s'écrire

$$\Delta\Phi = -4\pi i\rho + \Delta Q.$$

Divisons par l'inverse de la distance de deux points P et P′ et intégrons en P′ dans le volume total. On trouve

$$4\pi U = \int \frac{1}{r}\Delta Q\, dV - \int \frac{1}{r}\Delta\Phi\, dV,$$

cette relation est vraie partout et U est le potentiel newtonien. La fonction Φ étant constante sur S satisfait à la relation

$$\int \frac{1}{r}\Delta\Phi\, dV = -\int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\, dS, \quad S, \quad E,$$

sur la surface et à l'extérieur. Le potentiel peut s'écrire

$$4\pi U = \int \frac{1}{r}\Delta Q\, dV + \int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\, dS. \tag{43}$$

Mais sur la surface S, l'équation $\Phi_S = U + Q$ doit être vérifiée, d'où

$$\int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\, dS = 4\pi\Phi_S - 4\pi Q - \int \frac{1}{r}\Delta Q\, dV, \quad S, \quad I.$$

Cette relation, vraie sur S, l'est encore à l'intérieur I de S, car les deux membres sont harmoniques dans I. Le second représente un potentiel de simple couche, créé par une densité $g = \frac{d\Phi}{dn}$ répartie sur la surface S. Il est donc connu à la constante Φ_S près. S'il existait deux couches g' et g'', leur différence donnerait

$$\int \frac{1}{r}(g' - g'')\, dS = 4\pi(\Phi'_S - \Phi''_S),$$

où Φ'_S et Φ''_S sont deux valeurs de Φ_S. Mais alors la densité $g' - g''$ serait

celle d'une couche électrique en équilibre à la surface du conducteur V. Elle créerait, en effet, un potentiel constant dans V. Cette couche ne pourrait changer de signe, en vertu d'un résultat rappelé au paragraphe 9.

L'équation de Poincaré, étendue aux rotations de genre un, donne ensuite

$$\int (g' - g'')\, dS = 0.$$

La densité g' serait identique à g''. On en conclut :

La pesanteur sur la surface libre ne dépend que de cette surface S, de la vitesse angulaire $\omega(l)$, et de la masse totale M. Symboliquement,

$$g = F\,|\,S,\ \omega(l),\ M\,|,\quad S.$$

Ensuite, le potentiel newtonien peut s'écrire, en vertu de la relation (43),

$$U = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\Delta Q\, dV + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r} g\, dS, \quad E. \tag{44}$$

Il est donc, lui aussi, fonction de S, $\omega(l)$ et M.

Le potentiel newtonien à l'extérieur de l'astre ne dépend que de la surface libre S, *de la vitesse angulaire* $\omega(l)$ *et de la masse totale* M; symboliquement,

$$U = F\,|\,S,\ \omega(l),\ M\,|,\quad E.$$

C'est l'extension cherchée du théorème de Stokes. Cette méthode a l'avantage de fournir en même temps l'expression (44) de ce potentiel à l'extérieur de l'astre. M. Dive a étendu ce théorème à toute rotation permanente par une autre méthode.

26. **Les moments d'inertie et les valeurs stokiennes.** — Soient A, B, C les moments d'inertie du corps par rapport aux axes. Le premier s'écrit

$$A = \int \rho(y^2 + z^2)\, dV,$$

et les autres s'obtiennent par permutation des lettres. Supposons la masse fluide en équilibre relatif et extrayons la densité de l'équation de Poisson pour le champ de la pesanteur :

$$4\pi i\rho = 2\omega^2 - \Delta\Phi,$$

puis portons ρ dans l'expression de A. L'application de l'identité (5) de

Green donne, sans grande difficulté,

$$4\pi i A = 4\int (\Phi_S - \Phi)\, dV + \int g(y^2 + z^2)\, dS + 2\omega^2 \int (y^2 + z^2)\, dV.$$

Cette expression montre que les moments d'inertie dépendent du champ de la pesanteur à l'intérieur de l'astre, puisque la première intégrale porte sur $\Phi_S - \Phi$ dans l'astre. Mais la soustraction de deux formules semblables élimine ce premier terme et il reste

$$4\pi i(A - B) = \int g(y^2 - x^2)\, dS + 2\omega^2 \int (y^2 - x^2)\, dV. \tag{45}$$

Si les éléments de Stokes S, ω, M sont connus, g est connu sur la surface libre S et la différence A — B est entièrement déterminée par ces éléments

$$A - B = F[S, \omega, M].$$

Si l'astre était en rotation permanente de genre un, on aurait

$$4\pi i(A - B) = \int g(y^2 - x^2)\, dS + \int (y^2 - x^2)\, \Delta Q\, dV$$

et

$$A - B = F[S, \omega(l), M].$$

Les autres moments d'inertie satisfont à des relations semblables, bien entendu.

Nous appellerons « constante stokienne » une quantité qui ne dépend que des éléments de Stokes : S, $\omega(l)$, M.

Les trois différences des moments d'inertie sont des constantes stokiennes.

Revenons à l'expression (18) du potentiel à l'extérieur du corps, en coordonnées polaires R, θ, ψ

$$U(R, \theta, \psi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{R^{n+1}} Y_n(\theta, \psi).$$

Ce potentiel ne dépend que des éléments stokiens. Les coefficients des fonctions sphériques fondamentales, en lesquelles s'exprime Y_n, sont donc autant de constantes stokiennes.

Il en est ainsi notamment des coefficients du développement (20).

27. Le point de vue de la théorie des équations aux dérivées partielles. — Nous voudrions envisager ici le problème des figures d'équilibre dans ses rapports avec les problèmes classiques de Dirichlet et de Neumann. Cette analogie n'a de sens que si la frontière, ici la surface

libre, est supposée connue. L'essentiel de nos remarques s'étendrait d'ailleurs aux rotations de genre un.

Reprenons l'équation fondamentale

$$\Phi = U + Q \tag{46}$$

et faisons agir l'opérateur de Laplace Δ

$$\Delta\Phi = \Delta U + \Delta Q. \tag{47}$$

La relation (46) implique la relation (47), mais l'inverse n'est pas vrai et (47) implique la relation plus générale que (46), où H est une fonction harmonique

$$\Phi = U + Q + H. \tag{48}$$

Mais, si la relation (46) est satisfaite sur une surface fermée s, par exemple sur la surface libre, alors les équations (47) partout et (46) sur s équivalent à (46) partout et constituent la condition suffisante et nécessaire pour qu'il y ait équilibre relatif. En effet, la fonction H nulle sur une surface fermée serait identiquement nulle. La surface fermée, dont il est question ici, pourrait d'ailleurs être remplacée par un ensemble plus restreint de points jouissant de cette propriété qu'une fonction harmonique dans un domaine, nulle sur cet ensemble de points, soit identiquement nulle.

Faisons maintenant intervenir l'équation de Poisson pour le champ de la pesanteur

$$\Delta\Phi = -4\pi i\rho(\Phi) + 2\omega^2.$$

La densité ne dépend que de Φ et l'équation précédente revêt la forme

$$\Delta\Phi = F(\Phi).$$

Quant à la condition supplémentaire que l'équation

$$\Phi = U + Q$$

soit satisfaite sur la surface libre, elle est équivalente à une condition de Neumann, comme nous allons le voir.

En effet, nous savons [§ 25, formule (43)], que le potentiel U sur la surface S est donné par l'équation

$$U = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\,dS + \frac{\omega^2}{2\pi}\int \frac{1}{r}\,dV, \quad S.$$

La condition complémentaire $\Phi = U + Q$ sur S s'écrit

$$\int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS = 4\pi\Phi_S - 4\pi Q - 2\omega^2 \int \frac{1}{r} dV, \quad S, \quad I \tag{48'}$$

et la masse totale M détermine Φ_S. L'équation précédente donne à son tour $\frac{d\Phi}{dn}$ sur S. Cette succession de valeurs de la dérivée normale est donc déterminée par les éléments de Stokes et la connaissance de cette dérivée remplace la condition supplémentaire.

Appelons *problème de Neumann-Dirichlet généralisé* la question suivante :

Étant donnée une surface fermée S, déterminer deux fonctions $\Phi(x, y, z)$ et $F(\Phi)$ satisfaisant à l'équation

$$\Delta\Phi = F(\Phi)$$

à l'intérieur de S et telles que l'on ait sur cette surface elle-même

$$\Phi = f_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\Phi}{dn} = f_2,$$

f_1 et f_2 étant deux fonctions données.

Le problème des figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène est au point de vue des équations aux dérivées partielles un problème de Neumann-Dirichlet généralisé si l'on suppose connus les trois éléments de Stokes S, ω, M *qui fixent la frontière et les conditions aux limites.*

Si la masse totale M n'est pas donnée, les conditions de Neumann et de Dirichlet s'élargissent.

En effet, la valeur constante Φ_S de Φ sur S reste arbitraire et la dérivée normale $\frac{d\Phi}{dn}$ n'est plus alors déterminée qu'à une charge électrique en équilibre près comme le montre l'équation (48').

Remarquons que si la Terre était parfaitement fluide et si, par les mesures de triangulation, nous connaissions exactement la forme de la surface libre S et par les mesures de pesanteur la succession des valeurs g, c'est-à-dire $\frac{d\Phi}{dn}$ sur cette surface, ce serait un problème de Neumann-Dirichlet généralisé que l'on serait amené à résoudre pour trouver la ou les répartitions possibles de la matière à l'intérieur du globe.

Dans son remarquable ouvrage *Astronomy and Cosmogony* (1),

(1) *Cambridge University Press*, 1929.

M. Jeans énonce sans démonstration complète une proposition d'après laquelle les éléments de Stokes et l'équation caractéristique du fluide déterminent entièrement la fonction $\rho(x, y, z)$. Traduite dans le langage actuel, cette proposition revient à affirmer que s'il existe une solution du problème de Neumann-Dirichlet où les fonctions f_1 et $f_2 = c$ sont données, et où la dépendance entre F et Φ est également connue, cette solution est unique. Nous verrons plus tard que la densité superficielle, qui serait connue dans ce cas par l'équation caractéristique $\rho = f(o)$, ferait connaître la dérivée seconde $\frac{d^2\Phi}{dn^2}$ sur la surface libre. Ces conditions paraissent en effet suffisantes pour assurer l'unité de la solution et je partage à cet égard l'opinion de M. Jeans.

Ces quelques remarques suffiront, je l'espère, à montrer la parenté entre le problème des figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène et ceux que l'on rencontre dans le domaine classique des équations aux dérivées partielles.

On me pardonnera d'insister sur une analogie avec les équations intégrales quoique je n'apporte pas ici de résultat positif concernant les figures d'équilibre. Peut-être les remarques suivantes suggéreront-elles à quelques mathématiciens l'idée de poursuivre des recherches dans cette direction-là.

Au point de vue des équations intégrales, la relation primitive

$$\Phi = U + Q$$

s'écrit

$$\Phi - i\int \frac{\rho(\Phi)}{r}\, dV = Q. \tag{49}$$

Il faut la résoudre avec la condition $\Phi = \text{const.}$ sur S et c'est suffisant. En F elle s'écrit encore

$$4\pi\Phi + \int \frac{1}{r} F(\Phi)\, dV = 4\pi Q + 2\omega^2 \int \frac{1}{r}\, dV,$$

à résoudre avec la même condition à la limite.

Appliquons l'identité (5) de Green aux deux fonctions $\frac{1}{r}$ et Φ en ayant soin d'entourer le point potentié P d'une petite sphère, comme on le fait habituellement. L'identité s'écrira

$$4\pi\Phi + \int \frac{1}{r}\Delta\Phi\, dV = \int \Phi \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, dS - \int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\, dS. \tag{5'}$$

Donnons-nous maintenant les conditions de Dirichlet et de Neumann et l'équation $\Delta\Phi = F(\Phi)$. L'identité précédente entraînerait la consé-

quence suivante :

$$(5') \qquad 4\pi\Phi + \int \frac{1}{r} F(\Phi)\, dV = \int f_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS - \int f_2 \frac{1}{r} dS.$$

Toute solution du problème de Dirichlet-Neumann sera solution de cette nouvelle équation. Si la fonction F était identiquement nulle, on aurait affaire au problème de Dirichlet et les deux conditions aux limites seraient en général incompatibles. La fonction Φ serait entièrement déterminée par la relation

$$4\pi\Phi = \int f_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS - \int f_2 \frac{1}{r} dS$$

et Φ ne tendrait pas vers la fonction f_1 quand on se rapproche de la frontière, du moins pas en général. Les mêmes remarques subsisteraient à l'égard de l'équation (5″) si la fonction F était une fonction connue de x, y, z et, dans ce cas, on aurait affaire simplement à un problème de Dirichlet transformé. La masse homogène est dans cette circonstance, car F est une constante

$$F = -4\pi i\rho + 2\omega^2.$$

Pour la masse hétérogène, l'équation (5″) est une relation intégro-fonctionnelle, puisqu'il s'agit de déterminer à la fois la fonction $\Phi(x, y, z)$ et la fonction $F(\Phi)$. Si l'équation caractéristique du fluide est donnée, la dépendance entre F et Φ est connue, il reste à déterminer $\Phi(x, y, z)$ et l'équation (5″) revêt alors la forme d'une équation intégrale en général non linéaire.

Nous avons vu que toute solution du problème de Neumann-Dirichlet est solution de (5″); mais, toute solution de l'équation intégro-fonctionnelle (5″) qui satisfait à la condition de Dirichlet est solution du problème de Neumann-Dirichlet. En effet, une solution de (5″) satisfait à l'équation $\Delta\Phi = F(\Phi)$ et l'identité (5′) étant toujours vraie, on aurait entre les deux potentiels de surface la relation

$$\int (\Phi - f_1) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS = \int \left(\frac{d\Phi}{dn} - f_2\right) \frac{1}{r} dS$$

qui serait satisfaite dans tout le volume V à l'exclusion de la frontière, sur laquelle le potentiel de double couche subit une discontinuité. Et, alors, si la condition de Dirichlet $\Phi = f_1$ est remplie, la condition de Neumann $\frac{d\Phi}{dn} = f_2$ l'est aussi, en vertu d'une remarque du paragraphe 9, le potentiel de simple couche devant être identiquement nul.

On peut dire qu'au point de vue des équations intégrales ci-dessus : (49) *et* (5″), *la condition de Dirichlet intervient seule.*

Puisque l'on peut, dans le problème général, disposer de la fonction F, il suffirait, en résolvant (5″), de respecter la première condition, la seconde s'ensuit.

Dans le problème des figures d'équilibre, la fonction Φ n'est déterminée qu'à une constante près. On peut la supposer nulle sur la surface et alors l'équation intégro-fonctionnelle

$$4\pi\Phi(P) + \int G(P, P')\,F[\Phi(P')]\,dV = 0,$$

où $G(P', P'')$ est la fonction de Green relative à S, n'est pas sans rapport avec notre problème, puisque toute solution de cette équation serait solution de $\Delta\Phi = F(\Phi)$ avec $\Phi = 0$ sur S.

Pour la recherche des figures d'équilibre voisines d'une figure donnée, on pourrait songer à employer l'équation aux dérivées fonctionnelles de M. Hadamard (1) relative à la variation de la fonction de Green quand on passe d'une surface à une surface voisine.

M. Lichtenstein (2) a, par une méthode toute différente, introduit, dans la recherche des figures d'équilibre, la théorie des équations intégrales linéaires.

---

(1) HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*, p. 303.

(2) LICHTENSTEIN, *Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung*, p. 38 et suivantes.

CHAPITRE III.

STRATIFICATION, DENSITÉ ET PESANTEUR.

28. **La formule de H. Bruns.** — Les trois équations fondamentales de l'hydrodynamique se résument ainsi pour toute rotation permanente de genre un :

$$\Phi(\rho) = U + Q,$$

Φ est le potentiel de la pesanteur, il ne dépend que de la densité ρ, U est le potentiel newtonien et Q le potentiel de la force centrifuge.

Faisons agir sur les deux membres de l'équation l'opérateur de Laplace Δ :

$$\Delta\Phi = \Delta U + \Delta Q.$$

Si i représente la constante de l'attraction universelle, la formule de Poisson, appliquée à U, donne

$$\Delta\Phi = -4\pi i\rho + \Delta Q. \tag{50}$$

Nous appellerons cette relation « équation de Poisson pour le champ de la pesanteur ». Nous allons la transformer de manière à faire intervenir deux éléments importants : la pesanteur elle-même et la courbure moyenne des surfaces d'égale densité.

Soient, en effet, α, β, γ les cosinus directeurs de la verticale dirigée vers le bas, et g l'intensité de la pesanteur ; les projections du vecteur $\vec{g}$ sont :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = g\alpha, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = g\beta, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = g\gamma.$$

Le symbole de Laplace n'est autre que la divergence du vecteur $\vec{g}$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial g}{\partial x}\alpha + \frac{\partial g}{\partial y}\beta + \frac{\partial g}{\partial z}\gamma + g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right).$$

Si dn représente l'élément de normale à la surface de niveau $\Phi = \text{const.}$, dirigé vers le bas, la somme des trois premiers termes donne

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{dg}{dn}.$$

Si, d'autre part, c représente le double de la courbure moyenne de la surface d'égale densité passant au point x, y, z, les rayons principaux étant comptés positivement vers le bas, on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = -c.$$

Cette équation, d'ordre strictement géométrique, sera établie au paragraphe suivant. Le laplacien s'écrit donc, après ces transformations,

$$\Delta\Phi = \frac{dg}{dn} - cg, \tag{51}$$

et l'équation de Poisson pour le champ de la pesanteur

$$\frac{dg}{dn} - cg = -4\pi i\rho + \Delta Q.$$

Cette relation est très remarquable et joue le même rôle que l'équation (50). En remplaçant ΔQ par sa valeur facile à calculer

$$\Delta Q = 2\omega^2 + 2l^2 \frac{d\omega^2}{dl^2},$$

où l est la distance du point considéré x, y, z à l'axe de rotation Oz, elle s'écrit, pour l'équilibre relatif,

$$\frac{dg}{dn} - cg = -4\pi i\rho + 2\omega^2 \tag{52}$$

et pour toute rotation barotrope

$$\frac{dg}{dn} - cg = -4\pi i\rho + 2\omega^2 + 2l^2 \frac{d\omega^2}{dl^2}.$$

Enfin, M. Dive a montré que pour toute rotation barocline, elle revêt la forme

$$\frac{dg}{dn} - cg = -4\pi i\rho + 2\omega^2 + 2l^2 \frac{\partial\omega^2}{\partial l^2},$$

mais c est alors le double de la courbure moyenne de la surface d'égale pression passant au point considéré. Cette surface ne coïncide plus avec la surface d'égale densité.

La relation (52) a été indiquée par H. Bruns dans son Mémoire *Figur der Erde*, publié en 1878, mais y est transcrite avec des notations qui ne la font pas ressortir. Depuis lors, M. Pizzetti [1] est, à notre connais-

[1] Pizzetti, *Principi della teoria meccanica delle figure dei pianeti*, p. 24.

sance, le seul auteur qui l'ait mentionnée; ni Tisserand dans son *Traité de Mécanique céleste*, ni Helmert dans son ouvrage *Höhere Geodäsie*, ni même l'*Encyclopédie mathématique* ne l'indiquent. Son intérêt est cependant immense puisqu'elle joue le même rôle que l'équation de Poisson pour la pesanteur. C'est une relation entre c, g, $\frac{dg}{dn}$, i, ρ et ω qui permet de calculer l'une de ces quantités si l'on suppose les autres connues. Elle est entièrement rigoureuse et remplace avantageusement les formules approximatives que l'on donne, par exemple, pour l'accroissement de la pesanteur suivant la verticale.

Admettons que les mesures précises de pesanteur soient praticables dans un sous-marin, qui échappe au balancement que les vagues font subir aux corps flottants à la surface. Deux mesures de la pesanteur à deux profondeurs différentes suffiraient, en théorie, pour déterminer la courbure moyenne de la surface libre des océans.

29. **Complément analytique.** — La transformation précédente (51) est à recommander dans tout problème de physique mathématique où un laplacien $\Delta\Phi$ intervient et où les surfaces $\Phi = \text{const.}$ et la dérivée normale $\frac{d\Phi}{dn}$ ont elles-mêmes une signification physique immédiate, comme c'était le cas au paragraphe précédent. Aussi voulons-nous indiquer rapidement trois méthodes conduisant à la transformation dont nous avons fait usage.

1° La première consiste à partir d'une expression (1), qui lie le laplacien Δ au paramètre différentiel du second ordre de Beltrami Δ_2. Pour toute fonction Φ régulière au sens fort et toute surface Σ régulière, le $\Delta\Phi$ s'exprime en un point de Σ, au moyen du $\Delta_2\Phi$, du double c de la courbure moyenne de la surface Σ au point considéré et des dérivées normales relatives à la surface $\frac{d\Phi}{dn}$ et $\frac{d^2\Phi}{dn^2}$. On a

$$\Delta\Phi = \Delta_2\Phi + \frac{d^2\Phi}{dn^2} - c\frac{d\Phi}{dn}.$$

Mais, si la surface Σ coïncide avec la surface $\Phi = \text{const.}$, le paramètre de Beltrami est identiquement nul et il reste

$$\Delta\Phi = \frac{d^2\Phi}{dn^2} - c\frac{d\Phi}{dn}. \tag{53}$$

(1) *Voir* par exemple HADAMARD, *Leçons sur les ondes*, (p. 50, édition 1903).

2° *Démontrons que l'on a bien, comme nous l'affirmions,*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = -c. \tag{54}$$

Pour cela, envisageons une famille de surfaces dépendant d'un paramètre; α, β, γ seront les projections d'un segment de longueur unité n porté par les normales aux surfaces de la famille. Le premier membre de (54) n'est autre que la divergence de ces vecteurs normaux. Nous la représenterons par

$$\operatorname{div} n.$$

Soient, alors, $d\mathrm{S}$ un élément d'une des surfaces et $d\mathrm{S}'$ l'élément correspondant d'une surface voisine, détaché sur S′ par les normales élevées à S sur le contour de $d\mathrm{S}$. Une relation connue dans le calcul des variations, en particulier dans la théorie des surfaces minima, permet d'écrire

$$d\mathrm{S}' - d\mathrm{S} = -c\, d\mathrm{S}\, dn, \tag{55}$$

où dn est la longueur moyenne des normales envisagées allant de S à S′.

Considérons alors le petit volume V limité par $d\mathrm{S}$, $d\mathrm{S}'$ et les normales au contour de $d\mathrm{S}$; appliquons au vecteur normal l'identité (3) de Green du flux et de la divergence. On trouve

$$\int \operatorname{div} n\, d\mathrm{V} = \int \text{flux de } n\, d\mathrm{S}' - \int \text{flux de } n\, d\mathrm{S}.$$

Le long des parois normales, le flux est nul. Comme le vecteur n est de longueur unité, le second membre vaut $d\mathrm{S}' - d\mathrm{S}$. Quant au premier, il vaut $d\mathrm{S}\, dn \operatorname{div} n$. On a donc $d\mathrm{S}\, dn \operatorname{div} n = d\mathrm{S}' - d\mathrm{S}$. En rapprochant cette formule de (55) on trouve immédiatement

$$\operatorname{div} n = -c.$$

3° Enfin, dans sa thèse, M. Dive déduit cette dernière relation d'une expression de la courbure moyenne donnée par M. de la Vallée Poussin dans son *Cours d'analyse infinitésimale*, p. 431.

30. **La stratification et sa représentation paramétrique.** — La stratification sera la répartition des surfaces d'égale densité au point de vue strictement géométrique. Nous dirons : stratification ellipsoïdale, ou encore homothétique, si les couches d'égale densité coïncident avec une famille d'ellipsoïdes, ou encore une famille de surfaces homothétiques. Les surfaces d'égale densité seront caractérisées par un paramètre t. Le choix de cette lettre est certes critiquable, mais le temps ne figurant pas

dans les équations des rotations permanentes, on peut bien employer la lettre t pour cet usage. La notation i est aussi critiquable mais serait-il plus naturel de désigner la constante de l'attraction par f comme on le fait d'ordinaire ?

Nous appellerons « densité transformée », pour l'équilibre relatif, l'expression

$$f = -4\pi i\rho + 2\omega^2$$

et

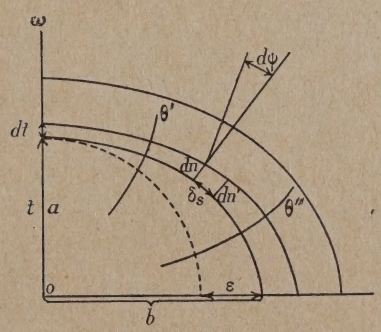
$$f = -4\pi i\rho + 2\omega^2 + 2l^2\frac{d\omega^2}{dl^2}$$

pour les mouvements de genre un. La première n'est qu'un cas particulier de la seconde.

Enfin, nous appellerons avec Liapounoff « loi des densités », la fonction $\rho(t)$ qui attache à chaque surface t une densité ρ. Les fonctions ρ, Φ et la pression p ne dépendent que de t pour tout mouvement de genre un; et pour l'équilibre relatif, la densité transformée f ne dépend, elle aussi, que de t.

Envisageons maintenant les trajectoires orthogonales des surfaces d'égale densité. Ce sont les lignes de force du champ de la pesanteur. Quoiqu'elles forment une multiplicité à deux paramètres, nous les représenterons, ici, par un seul θ, pour simplifier. La valeur $\theta = 0$ représentera une ligne de force particulière. Un d représentera une différentielle relative à un déplacement sur une ligne de force θ, tandis que un δ marquera une différentielle relative à un déplacement sur une surface d'égale densité; d est donc relatif à θ constant, δ à t constant.

Fig. 2.



Enfin, une parenthèse affectée de l'indice θ ou des indices θ', θ'' signifiera que la parenthèse doit être prise le long des lignes de force $\theta, \theta', \theta''$. Posons, dn étant un élément de normale compté positivement dans le

sens de t croissant,

$$\frac{dn}{dt} = \mathrm{N}(t, \theta).$$

La quantité N n'est jamais négative.

31. **Relations entre la stratification, la densité et la pesanteur.** — La pesanteur n'est autre que la dérivée normale du potentiel Φ et l'on peut écrire

$$g = \frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{dn}.$$

La dérivée de Φ par rapport à t sera désignée par Φ' et la formule précédente s'écrit, avec N,

$$g\,\mathrm{N} = \Phi'.$$

Elle traduit une propriété appartenant à tout champ de force dérivant d'un potentiel : la force varie en raison inverse de la distance des surfaces de niveau. On peut lui donner une forme légèrement différente

$$(56) \qquad (g\,\mathrm{N})_{\theta'} = (g\,\mathrm{N})_{\theta''},$$

θ' et θ'' étant de nouveau deux lignes de force quelconque. La formule de Bruns peut s'écrire

$$(57) \qquad \frac{dg}{dt} = c\Phi' + f\mathrm{N}.$$

Elle est vraie le long d'une ligne de force quelconque et sur toute surface t.

Ceci étant, dérivons par rapport à t les deux membres de l'équation (56)

$$(58) \qquad \left(\frac{dg}{dt}\mathrm{N} + g\frac{d\mathrm{N}}{dt}\right)_{\theta'} = \left(\frac{dg}{dt}\mathrm{N} + g\frac{d\mathrm{N}}{dt}\right)_{\theta''}.$$

Puis remplaçons la dérivée de g par sa valeur (57) et réunissons dans le premier membre ce qui ne dépend que de t. On trouve facilement pour l'équilibre relatif

$$(59) \qquad \frac{f(t)}{\Phi'(t)} = -\frac{\left(c\mathrm{N} + \dfrac{d}{dt}\mathrm{LN}\right)_{\theta'} - \left(c\mathrm{N} + \dfrac{d}{dt}\mathrm{LN}\right)_{\theta''}}{(\mathrm{N}^2)_{\theta'} - (\mathrm{N}^2)_{\theta''}},$$

L désignant le logarithme népérien. Dans cette relation, le premier membre ne dépend que de t tandis que le second ne contient que des éléments géométriques. Pour simplifier les discussions suivantes, nous

désignerons par $\Psi(t)$ la valeur commune des rapports précédents :

$$\Psi(t) = \frac{f(t)}{\Phi'(t)}, \tag{60}$$

$$\Psi(t) = -\frac{\left(cN + \frac{d}{dt}LN\right)_{\theta'} - \left(cN + \frac{d}{dt}LN\right)_{\theta''}}{(N^2)_{\theta'} - (N^2)_{\theta''}}, \tag{61}$$

Ψ ne dépend, d'une part, que de t et, d'autre part, que de la stratification. Il y a plus, la fonction $\Psi(t)$ pourrait être déterminée par la stratification au voisinage d'une seule ligne de force, car on peut prendre deux lignes θ' et θ'' aussi près l'une de l'autre que l'on voudra. Pour une valeur particulière de t, la fonction Ψ ne dépend même que de la stratification au voisinage d'un point. L'équation (60) peut s'écrire

$$\frac{f}{g} = \Psi N \tag{62}$$

et le second membre, ici encore, ne dépend que de la stratification.

A. *Le rapport, en un point, de la densité transformée et de la pesanteur ne dépend que de la stratification au voisinage de ce point.*

Revenons, maintenant, à la formule (57) en remplaçant f par $\Psi\Phi'$:

$$\frac{dg}{dt} = \Phi'(c + \Psi N),$$

puis remplaçons Φ' par gN et divisons par g,

$$\frac{1}{g}\frac{dg}{dt} = cN + \Psi N^2.$$

Intégrons en t le long d'une ligne de force particulière $\theta = 0$, à partir d'un point quelconque $t = 0$, et soient $g_{0,0}$ la valeur de g en ce point et g_0 la valeur de g le long de la ligne de force $\theta = 0$. On trouve facilement

$$g_0 = g_{0,0}\, e^{\int_0^t (cN + \Psi N^2)_0\, dt}.$$

Enfin, les relations (56) et (62) donnent en un point quelconque

$$f = g_{0,0}\Psi N_0 \quad e^{\int_0^t (cN + \Psi N^2)_0\, dt}, \tag{63}$$

$$g = g_{0,0} N_0 N^{-1}\, e^{\int_0^t (cN + \Psi N^2)_0\, dt}. \tag{64}$$

Dans les seconds membres de ces deux formules $g_{0,0}$ représente donc

la pesanteur en un point particulier et les autres symboles ne dépendent que de la stratification.

B. *La densité transformée et la pesanteur sont déterminées dans toute la masse par la stratification et la pesanteur en un point.*

C. *Sur une stratification donnée, la répartition de la densité transformée et de la pesanteur n'est possible que d'une seule manière à un facteur multiplicatoire près.*

Ce facteur $g_{0,0}$ peut être envisagé, si l'on veut, comme la pesanteur au pôle de la surface libre; il est alors entièrement déterminé par les éléments de Stokes S, ω, M. On en conclut :

D. *La densité et la pesanteur sont en tous points déterminées d'une manière unique par la stratification, la vitesse angulaire et la masse totale.*

32. **Le cas exceptionnel des sphères concentriques.** — Les formules précédentes (63) et (64) deviendraient illusoires si le rapport Ψ n'était plus défini d'une manière univoque par la stratification. Mais il n'y a que le cas banal des sphères concentriques qui puisse donner lieu à cette imprécision.

Pour que la fonction Ψ cesse d'être déterminée par l'équation (61), il faut qu'il existe un intervalle $\alpha < t < \beta$ sur lequel le second membre se présente constamment sous la forme $\frac{0}{0}$. On devrait donc avoir

$$N_{\theta'} = N_{\theta''},$$

puis

$$C_{\theta'} = C_{\theta''},$$

quelles que soient les lignes de force θ' et θ'' et les valeurs de t sur l'intervalle α, β, les surfaces de niveau devraient être à courbure moyenne constante, parallèles entre elles, et en plus fermées. Il n'y a que des sphères concentriques qui satisfassent à ces conditions.

En résumé, la fonction Ψ ne cesserait d'être déterminée univoquement par la stratification que s'il existait une zone d'épaisseur finie composée exclusivement de sphères concentriques. Ce cas exceptionnel pouvait être prévu *a priori*, puisque des couches sphériques au repos peuvent être chargées arbitrairement sans que cela trouble l'équilibre.

33. **Une condition nécessaire purement géométrique.** — Pour simpli-

fier, introduisons deux symboles X et Y définis comme suit :

$$X = N^2, \tag{65}$$

$$Y = CN + \frac{d}{dt} LN. \tag{66}$$

L'équation qui servait à définir la fonction Ψ au moyen de la stratification s'écrit :

$$\Psi(t) = -\frac{Y_{\theta'} - Y_{\theta''}}{X_{\theta'} - X_{\theta''}}.$$

Si l'on considère alors trois lignes de force θ, θ' et θ'' on peut éliminer Ψ et l'on obtient

$$\frac{Y_\theta - Y_{\theta'}}{X_\theta - X_{\theta'}} = \frac{Y_\theta - Y_{\theta''}}{X_\theta - X_{\theta''}}.$$

Cette relation est purement géométrique. Elle exprime une condition nécessaire à laquelle doit satisfaire toute stratification d'une masse fluide en équilibre relatif.

Elle est indépendante, non seulement de la densité et de la pesanteur, mais encore des éléments stokiens : vitesse angulaire et masse totale.

Remarque. — On peut donner du second membre de (66) une autre représentation. En effet, soit σ une aire élémentaire quelconque de la surface t; la formule (55) fournit la relation

$$c\, dn = -d\mathrm{L}\sigma.$$

Dès lors, δ étant une différentielle prise à t constant, (66) s'écrit :

$$Y = \frac{d}{dt} L \frac{N}{\sigma}$$

et l'équation (62) devient, en multipliant les deux membres par N,

$$\frac{f}{g} = \frac{1}{2} \frac{\delta\, d\mathrm{L} \frac{\sigma}{N}}{\delta\, dn}.$$

C'est une nouvelle expression du rapport de la densité transformée à la pesanteur, au moyen de la stratification au voisinage du point considéré.

34. L'impossibilité des stratifications homothétiques. — En 1903, M. Volterra a publié dans les *Acta mathematica*, t. 27, p. 105, un mémoire « Sur la stratification d'une masse fluide en rotation », où il prouve que les surfaces d'égale densité ne peuvent pas être des ellipsoïdes homothétiques.

Plus tard, M. Pizzetti est arrivé au même résultat par une méthode beaucoup plus simple. Je généraliserai la proposition en question en prouvant qu'*une stratification en surfaces homothétiques de forme quelconque est impossible pour une masse hétérogène en état d'équilibre relatif.*

La surface extérieure sera fermée et régulière, elle contiendra le centre O d'homothétie. Considérons deux rayons vecteurs r' et r'', la longueur du premier arrêté à la surface libre $t = 0$ sera prise pour unité et $1 - t$ sera la distance du centre à un point quelconque de ce rayon. Le long du premier rayon r' on aura $N = \lambda'$, le long du second r'' on aura $N = \lambda''$. Cela résulte de l'homothétie, λ' et λ'' sont des constantes.

Le rapport Ψ donné par la formule (61) se simplifie beaucoup et s'écrit :

$$\Psi(t) = -\frac{\lambda' c' - \lambda'' c''}{\lambda'^2 - \lambda''^2}.$$

Les courbures moyennes varient en raison inverse de la distance au centre, puisque les surfaces sont homothétiques. Si c'_0 et c''_0 sont les valeurs de ces courbures sur la surface libre, on aura en tout autre point des rayons r' et r''

$$c' = \frac{c'_0}{1-t}, \qquad c'' = \frac{c''_0}{1-t},$$

et le rapport Ψ s'écrit :

$$\Psi(t) = (1-t)^{-1}\,\Psi(0).$$

Nous savons que la fonction Ψ ne peut être indéterminée que si la stratification comporte une sphère au moins. La stratification serait maintenant entièrement sphérique. Ce cas ne nous intéresse pas, c'est le repos absolu. La fonction Ψ ne peut pas être identiquement nulle car il en serait de même de f en vertu de l'équation $f = \Psi\Phi'$, mais l'inégalité de Poincaré implique $f(t) < 0$, tout au moins au voisinage du centre. La fonction $\Psi(t)$ augmente donc en valeur absolue comme $(1-t)^{-1}$ lorsque t tend vers l'unité.

Il existe au moins un rayon vecteur qui est une ligne de force, le plus long par exemple, car il est bien normal aux surfaces de niveau. Nous le prenons pour rayon r' et soit g'_0 la pesanteur au point où r' perce la surface libre, on a par (63)

$$f(t) = g'_0\,\Psi(0)\,(1-t)^{-1}\,e^{\int_0^t [c'_0 + \Psi(0)](1-t)^{-1}\,dt},$$

et, en posant $k = + c'_0 + \Psi(0)$,

$$f(t) = g'_0\,\Psi(0)\,(1-t)^{-1+k}.$$

Si $k < +1$, $f(t)$ tendrait vers zéro quand t tend vers 1. C'est impossible, en vertu de l'inégalité de Poincaré, car $f(t)$ est inférieur à un nombre négatif au centre de l'astre et dans son voisinage;

Si $k = +1$, la densité serait constante et la masse homogène;

Si $k > +1$, la densité tendrait vers l'infini quand on se rapproche du centre, ce qui est physiquement exclu. Il n'y a pas d'autre possibilité.

Il n'y a donc que la masse homogène qui puisse être stratifiée en surfaces homothétiques.

Nous verrons plus loin que les surfaces d'égale pression sont bien homothétiques pour les ellipsoïdes homogènes de Maclaurin et de Jacobi.

35. **Sur la représentation analytique des surfaces équipotentielles.** — Partons de l'équation de Poisson pour le champ de la pesanteur, elle peut s'écrire

$$\Delta\Phi = f(t)$$

et envisageons deux représentations des surfaces de niveau :

1° La famille de ces surfaces peut être représentée au moyen du paramètre t par une équation de la forme

$$\varphi(x, y, z) - t = 0. \tag{67}$$

Pour que cette famille représente la stratification de la figure d'équilibre, il faut que l'on ait $\Phi = \Phi(t)$ et par suite

$$\Phi = \Phi[\varphi(x, y, z)].$$

L'équation de Poisson impose donc à la fonction $\varphi(x, y, z)$ une condition qu'il est facile de dégager. Elle s'écrit :

$$\Delta\varphi + P(t)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] = Q(t) \tag{68}$$

avec

$$P(t) = \frac{\Phi''(t)}{\Phi'(t)} \quad \text{et} \quad Q(t) = \frac{f(t)}{\Phi'(t)}.$$

L'équation (68) devra être satisfaite quelles que soient les valeurs des variables x, y, z, t, liées par la relation (67).

2° Envisageons une famille de surfaces données sous la forme la plus générale

$$F(x, y, z, t) = 0. \tag{69}$$

Un calcul sans grande difficulté montre que la fonction F devra satisfaire,

quelles que soient les variables x, y, z, t, liées par (69), à l'équation

$$\Delta F + PR + Q\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial t} = 0, \tag{70}$$

où les fonctions P et Q sont les mêmes que plus haut et où R représente

$$R = \frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial t}}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right].$$

En d'autres termes : pour que la famille de surfaces (69) puisse représenter la stratification d'une figure d'équilibre, il faut qu'il existe deux fonctions du seul paramètre t : $P(t)$ et $Q(t)$ telles que l'équation (70) soit une conséquence de l'équation $F = 0$.

36. **L'impossibilité des stratifications ellipsoïdales.** — Hamy en 1887 a démontré l'impossibilité pour une masse en équilibre relatif d'être composée de n fluides homogènes séparés par des ellipsoïdes. En 1903, M. Volterra démontrait l'impossibilité des stratifications ellipsoïdales homothétiques même s'il y a une infinité de couches différentes. En 1912, M. Véronnet établissait l'impossibilité des couches ellipsoïdales, même si la densité varie constamment. Enfin, en 1927, M. Dive a établi l'impossibilité des stratifications ellipsoïdales pour toute rotation de genre un. MM. Hamy, Véronnet et Dive emploient dans leurs thèses les expressions classiques du potentiel newtonien des ellipsoïdes homogènes.

Montrons que l'impossibilité des stratifications ellipsoïdales découle très facilement des formules (69) et (70) du paragraphe précédent. Je tiens à dire que M. Pizzetti s'inspire de considérations analogues dans son livre : *Principii della teorica meccanica delle figure dei pianeti*.

Les surfaces d'égale densité sont données par l'équation

$$F = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0, \tag{71}$$

où les coefficients ne dépendent que de t. En formant la condition (70) on trouve facilement une relation

$$2(a + b + c)(a'x^2 + b'y^2 + c'z^2) + \ldots = 0,$$

que je ne reproduis pas entièrement parce qu'elle est assez longue. Elle contient des formes homogènes d'ordre 4 et d'ordre 6 en x, y, z. La forme d'ordre 6 est

$$Q(t)(a'x^2 + b'y^2 + c'z^2)^3.$$

Cette expression ne doit dépendre que de t, si x, y, z sont liées par

(71); et $Q(t)$ ne peut pas être nul identiquement à cause de l'inégalité de Poincaré. Il faut donc que l'on ait

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

et la signification du paramètre t n'étant pas imposée à l'avance, nous pouvons égaler ces rapports à t^{-1}. Cela donne $a = a_1 t$, $b = b_1 t$, $c = c_1 t$ où a_1, b_1 c_1 sont des constantes. Les couches seraient homothétiques et par conséquent, la masse serait homogène ou composée de sphères concentriques, en vertu du théorème du paragraphe 34. La démonstration est faite.

37. **La stratification au voisinage du centre.** — Nous supposerons ici que les surfaces d'égale densité tendent vers un seul point, le centre, lorsque la densité tend vers son maximum et il s'agira de savoir vers quelle forme tendent ces surfaces quand on se rapproche du centre.

Nous supposerons la fonction $\rho(x, y, z)$ régulière au sens faible au voisinage du centre. La fonction $\Phi(x, y, z)$ sera, par suite, régulière au sens fort et stationnaire au centre de l'astre. Développons ce potentiel par la formule de Taylor

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(0, 0, 0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}z\right)^2. \tag{72}$$

Dans la puissance symbolique (2), les dérivées secondes doivent être prises au point θx, θy, θz, le nombre θ étant compris entre 0 et 1. Puisque la forme seule de ces surfaces nous intéresse, on peut supposer faites une homothétie et une rotation des axes. En remarquant en plus que les surfaces à Φ constant sont à ρ constant, la forme des surfaces d'égale densité est à la limite la même que celle de la quadrique

$$-1 = +\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}x^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}y^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}z^2, \tag{73}$$

les dérivées étant prises à l'origine. Cette quadrique, tout entière à distance finie, est un ellipsoïde, mais elle peut être dégénérée; ainsi les surfaces de niveau pourraient tendre, en forme, vers un cercle ou une aiguille. En résumé, *si la fonction* $\rho(x, y, z)$ *est régulière au sens faible*, les surfaces d'égale densité tendent, en forme, vers un ellipsoïde qui pourrait être dégénéré lorsque la densité tend vers son maximum.

Si la stratification était homothétique, elle serait ellipsoïdale, on déduit, alors, le théorème du paragraphe 34 de celui du paragraphe 36, mais au paragraphe 34 on supposait simplement que la densité restait bornée.

38. **L'équation de Clairaut.** — Quoique la méthode la plus satisfaisante pour retrouver les résultats classiques et les généraliser soit le procédé uniforme que nous exposerons dans le chapitre suivant, nous voudrions montrer ici avec quelle rapidité on peut les déduire des résultats du paragraphe 31.

Les surfaces d'égale densité seront supposées de révolution. Soient $a(t)$ et $b(t)$ le rayon polaire et le rayon équatorial de la surface t; $c_P(t)$ et $c_E(t)$ le double de la courbure moyenne de cette surface au pôle et à l'équateur, et, enfin $g_P(t)$ la pesanteur sur l'axe polaire. L'équation (61) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{4\pi i\rho(t) - 2\omega^2}{g_P(t)} = \frac{c_E b' - c_P a' + \dfrac{a''}{a'} - \dfrac{b''}{b'}}{b'^2 - a'^2}. \tag{74}$$

Les accents représentent ici des dérivées par rapport à t. Cette relation est rigoureuse et convient à toute surface de révolution autour de l'axe de rotation.

Supposons maintenant, avec Clairaut, que la stratification soit formée d'ellipsoïdes concentriques et que t représente le rayon polaire de ces ellipsoïdes. Posons $\varepsilon = b - a$. Pour des ellipsoïdes peu aplatis, c'est-à-dire en négligeant les termes de l'ordre de ε^2, les courbures sont

$$c_E = \frac{2}{t}, \qquad c_P = \frac{2}{t}\left(1 - 2\frac{\varepsilon}{t}\right)$$

et l'équation (74) s'écrit, pour une telle stratification,

$$\frac{4\pi i\rho - 2\omega^2}{g_P(t)}\varepsilon' = \frac{\varepsilon'}{t} + \frac{2}{t^2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon''. \tag{75}$$

Si ω^2 est très petit, ε, ε', ε'' le sont aussi; on peut négliger $\varepsilon'\omega^2$ dans le premier membre et calculer $g_P(t)$ dans l'hypothèse d'une stratification sphérique. Si $D(t)$ désigne la densité moyenne de la matière intérieure à la couche t, on trouve facilement, par un calcul classique,

$$\frac{4\pi i\rho(t)}{g(t)} = +\frac{3}{t} + \frac{D'}{D},$$

et l'équation (75) s'écrit sous la forme

$$\frac{2}{t} + \frac{D'}{D} = \frac{2}{t^2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}.$$

Enfin, en introduisant l'aplatissement $e = \dfrac{\varepsilon}{t}$, un calcul tout élémen-

taire donne *l'équation de Clairaut* qui lie l'aplatissement des couches à la densité moyenne

$$e''\mathrm{D} + 2e'\mathrm{D}' + \frac{2}{t}e\mathrm{D}' + \frac{6}{t}e'\mathrm{D} = 0.$$

39. **Les théorèmes de Clairaut.** — Soient : C_ρ le double de la courbure moyenne des surfaces à ρ constant et C_U la même quantité pour les surfaces à U constant, surfaces équipotentielles pour le champ de Newton.

Sur l'axe polaire, la formule de Bruns donne

$$\frac{dg}{dt} + \mathrm{C}_\rho g = 4\pi i\rho - 2\omega^2$$

et l'équation de Poisson s'écrit au même point

$$\frac{dg}{dt} + \mathrm{C}_\mathrm{U} g = 4\pi i\rho.$$

En soustrayant membre à membre, on trouve

$$\frac{2\omega^2}{g} = \mathrm{C}_\mathrm{U} - \mathrm{C}_\rho.$$

Puisque les surfaces sont de révolution, on a plus simplement

$$\frac{\omega^2}{g} = \frac{1}{\mathrm{R}_\mathrm{U}} - \frac{1}{\mathrm{R}_\rho}, \tag{76}$$

les R étant les rayons de courbure des méridiennes. Les surfaces équipotentielles varient entre deux répartitions limites qui correspondent : 1° au cas d'une concentration de toute la masse au centre et, 2° au cas d'une répartition homogène. On trouve, pour ces deux circonstances,

1°
$$\frac{1}{\mathrm{R}_\mathrm{U}} = \frac{1}{t}$$

et

2°
$$\frac{1}{\mathrm{R}_\mathrm{U}} = \frac{1}{t} - \frac{6}{5}\frac{e}{t}.$$

Tandis que l'on a de toute manière

$$\frac{1}{\mathrm{R}_\rho} = \frac{1}{t} - 2\frac{e}{t}.$$

L'équation (76) fournit alors facilement les deux relations qui constituent, elles aussi, un important théorème de Clairaut :

$$\frac{4}{5}e \leqq \frac{\omega^2 t}{g} \leqq 2e, \qquad \frac{1}{2}\frac{\omega^2 t}{g} \leqq e \leqq \frac{5}{4}\frac{\omega^2 t}{g}.$$

40. **L'équation de d'Alembert.** — Reprenons la formule (75). Dans le premier membre, $\varepsilon'\omega^2$ doit être considéré comme nul en première approximation; à l'extérieur de l'astre, la densité est nulle aussi et la relation se réduit à

$$4\varepsilon + 2t\varepsilon' - t^2\varepsilon'' = 0.$$

C'est une équation linéaire qui s'intègre facilement et donne, λ et u étant deux constantes,

$$\varepsilon = \omega^2\lambda(t^4 + ut^{-1}). \tag{77}$$

Nous allons voir que λ est lié à la masse totale de la planète et u à ses moments d'inertie.

Soit S une surface de niveau extérieure à l'astre. Intégrons les deux membres de l'équation de Poisson pour le champ de la pesanteur à l'intérieur de S puis faisons usage d'une identité de Green. On trouve, comme nous l'avons déjà vu, l'équation de Poincaré :

$$\int g\,dS = 4\pi i M - 2\omega^2 V, \tag{78}$$

où M est la masse totale et V le volume total intérieur à S.

Désignons par θ le complément de la latitude d'un point de S où la pesanteur est g et par g_0 la pesanteur au pôle de S. On a

$$g = \frac{g_0}{\frac{dn}{dt}} = \frac{g_0}{1 + \varepsilon' \sin^2\theta} = g_0(1 - \varepsilon' \sin^2\theta), \tag{79}$$

$$T = \frac{4}{3}\pi t^3, \qquad dS = (t + \varepsilon \sin^2\theta)^2\, d\Sigma,$$

$d\Sigma$ étant l'élément de la sphère unité. Portons ces expressions dans la formule (78). Intégrons et remplaçons ε par sa valeur (77). On trouve

$$\frac{iM}{t^2} - \frac{2}{3}\omega^2 t = g_0\left[1 + 2\omega^2\lambda\left(ut^{-2} - \frac{2}{3}t^3\right)\right].$$

Puis mettons en évidence la partie principale de la pesanteur

$$g_0 = \frac{iM}{t^2} + \omega^2 g_0^1,$$

ce qui donne

$$-g_0^1 = 2iM\lambda ut^{-4} + \frac{2}{3}t(1 - 2iM\lambda).$$

Le coefficient de t doit être nul, car g_0^1 ne peut pas croître avec t; on

a donc

$$\lambda = \frac{1}{2iM}, \qquad g_0^1 = -ut^{-4}.$$

Les deux relations déduites de (77)

$$\frac{\varepsilon}{t} = \omega^2\lambda(t^3 + ut^{-2}), \tag{80}$$

$$\varepsilon' = \omega^2\lambda(4\lambda - ut^{-2}) \tag{81}$$

donnent par addition

$$\frac{\varepsilon}{t} + \varepsilon' = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 t^3}{iM}, \tag{82}$$

$$\frac{\varepsilon}{t} + \varepsilon' = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 t}{g}. \tag{83}$$

Ce sont *des relations de Clairaut*. En introduisant la pesanteur $g_{\text{équa}}$ sur l'équateur de S donnée par (79) et l'aplatissement lui-même, la dernière (83) s'écrit sous la forme classique

$$e + \frac{g_{\text{équa}} - g_{\text{pôle}}}{g} = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 t}{g}.$$

Soient A le moment d'inertie de la masse par rapport à un diamètre équatorial Ox et C le moment d'inertie par rapport à l'axe polaire Oz. Nous avons déjà montré au paragraphe 26 que la différence de ces deux moments satisfait à la relation

$$4\pi i(C - A) = \int g(x^2 - z^2)\,dS + 2\omega^2\int (x^2 - z^2)\,dV. \tag{83'}$$

Mettons en évidence une sphère de même pôle que S. Dans cette sphère, l'intégrale qui figure dans le dernier terme de la relation précédente, est nulle. Il ne subsiste qu'une intégrale étendue à la zone qui va de la sphère précédente à la surface S ; mais cette zone est de l'ordre de ω^2 et le dernier terme de la formule (83') est de l'ordre de ω^4 ; nous pouvons le négliger. Il reste simplement

$$4\pi i(C - A) = \int g(x^2 - z^2)\,dS.$$

En remplaçant g par sa valeur (79) on trouve facilement

$$C - A = \frac{t^4}{3i}\left(\frac{iM}{t^2} - g_0\right)$$

ou

$$C - A = \frac{\omega^2}{3i}u.$$

C'est la relation cherchée, liant u au moment d'inertie. Enfin, en tirant u de la formule (80), on trouve *l'équation de d'Alembert :*

$$C - A = \frac{2}{3}\frac{g}{l}t^4\left(e - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 t}{g}\right).$$

Cette relation intervient dans la théorie de la précession des équinoxes, nous la retrouverons sous une autre forme plus tard.

On voit avec quelle rapidité la formule de Bruns et la relation (61) permettent de retrouver les résultats classiques de Clairaut et de d'Alembert.

CHAPITRE IV.

LE PROCÉDÉ UNIFORME.

41. **Le desideratum formulé par Tisserand.** — Quelques auteurs ont, depuis Laplace, développé l'inverse de la distance en série procédant suivant les polynomes de Legendre X_n. Ce développement procède aussi suivant les puissances des distances $\overline{OP}$ et $\overline{OP'}$ des deux points P et P' à une origine O. Si $r = \overline{PP'}$ et si γ représentent l'angle POP', on peut écrire d'une part

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\overline{OP}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} \right)^n X_n(\cos\gamma) \qquad \text{pour } \overline{OP'} < \overline{OP}$$

et, d'autre part,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\overline{OP'}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}} \right)^n X_n(\cos\gamma) \qquad \text{pour } \overline{OP} < \overline{OP'}.$$

Le premier développement diverge si $\overline{OP'} > \overline{OP}$, le second si $\overline{OP} > \overline{OP'}$.

Cherchons à calculer le potentiel newtonien en un point intérieur à la matière qui constitue la planète. Le point potentiant P' devra balayer l'astre tout entier, il sera à une distance $\overline{OP'}$ de l'origine, tantôt plus grande, tantôt plus petite que la distance $\overline{OP}$. Il est donc impossible de calculer ce potentiel en faisant usage d'un seul des développements précédents, comme nous l'avons déjà remarqué au paragraphe 14. Il faudrait les employer tous les deux, l'un pour la matière intérieure à la sphère de rayon $\overline{OP}$, l'autre pour la matière extérieure. Cela conduirait à d'inextricables difficultés théoriques et pratiques.

Certes, on pourrait légitimer, dans certains cas, l'emploi du développement divergent. Poisson a fait d'intéressantes remarques à ce propos et la théorie des séries divergentes, développée au début de ce siècle spécialement par M. Borel, permettrait peut-être de maîtriser une partie de la difficulté. Mais il est préférable de satisfaire au desideratum que

Tisserand formule à la page 317 du Tome II de son «Traité de Mécanique céleste». Cet auteur demande que ces difficultés de convergence soient rigoureusement élucidées. La méthode de ce Chapitre satisfait entièrement à ce vœu. Nous creuserons une cavité à l'intérieur de la masse fluide, en remplaçant la matière enlevée par une couche de niveau étalée sur la surface de la cavité. Le point potentié pourra être supposé à l'intérieur de cette dernière et même aussi près qu'on voudra de l'origine placée au centre de l'astre.

42. **Les données du problème.** — Envisageons une masse fluide hétérogène. Supposons que les différentes particules du fluide s'attirent suivant la loi de Newton, nous n'excluons pas d'ailleurs l'attraction de corps extérieurs, mais nous supposons que le fluide ait atteint un état d'équilibre relatif et tourne tout d'une pièce autour d'un axe fixe Oz avec une vitesse angulaire constante ω. On sait que les équations de l'hydrodynamique impliquent la relation suivante :

$$\Phi(\rho) = U + Q, \tag{84}$$

où U est le potentiel newtonien, Q le potentiel de la force centrifuge et Φ le potentiel du champ de la pesanteur; ce dernier ne doit dépendre que de la densité ρ à l'intérieur de l'astre.

Je supposerai que les surfaces d'égale densité sont de connexion sphérique et se réduisent à un seul point, le centre de l'astre situé sur l'axe de rotation lorsque la densité tend vers son maximum. Jointe à la condition que la densité ne décroisse pas de la surface libre au centre de l'astre, l'équation (84) représente la condition nécessaire et suffisante pour que le fluide soit en état d'équilibre relatif.

Le potentiel de la force centrifuge est $Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$; il est défini dans l'espace entier, ainsi que le potentiel newtonien U; l'équation (84) définit à son tour Φ dans l'espace entier. Nous appellerons S_1 la surface libre et les surfaces S à Φ constant, surfaces de niveau; elles coïncident à l'intérieur de la masse avec les surfaces d'égale densité. Les surfaces de niveau auront encore la connexion de la sphère à l'extérieur proche de la planète. La dérivée normale de Φ, prise vers l'intérieur de S, fournit, on le sait, l'intensité g de la pesanteur.

Nous ferons, comme précédemment, suivre une formule des lettres I, S, E pour exprimer que la relation est valable à l'intérieur I de S ou a l'extérieur E de S ou sur cette surface elle-même.

La fonction Q est analytique dans tout l'espace. La fonction U l'est à l'extérieur de l'astre. Elle est régulière au sens fort à l'intérieur de la

masse si la densité, comme nous le supposons, est régulière au sens faible. La fonction Φ est donc régulière au sens fort dans l'astre et analytique à l'extérieur. Elle est régulière au sens faible partout. L'équation de Poisson et l'expression de Q donnent

$$\Delta\Phi = -4\pi i\rho + 2\omega^2,$$

où i est la constante de l'attraction universelle.

43. **Usage d'une identité de Green.** — Revenons pour un instant à l'analyse. Soit $\Phi(P')$ une fonction régulière au sens fort dans un volume V limité par une surface fermée régulière et sur cette surface elle-même. Soit r la distance du point P' à un point P. Supposons en plus la fonction Φ constante sur S et soit Φ_S sa valeur.

Si le point P *est extérieur à* S, la fonction $\frac{1}{r}$ de P' est régulière dans V et sur S. L'identité de Green (5) donne

$$\int \frac{1}{r}\Delta\Phi\, dV - \int \Phi\Delta\frac{1}{r}\, dV + \int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\, dS - \int \Phi\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, dS = 0, \quad \text{E.}$$

Nous employons la notation de l'intégrale simple, l'élément de volume dV ou de surface dS indique qu'il s'agit d'intégrales triples ou doubles.

La seconde intégrale est nulle, puisque $\frac{1}{r}$ est harmonique dans V, la dernière intégrale est égale à Φ_S que multiplie une intégrale de Gauss nulle. Il reste simplement

$$\int \frac{1}{r}\Delta\Phi\, dV + \int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\, dS = 0, \quad \text{E.}$$

Si le point P *est intérieur à* S, il faut entourer P d'une sphère σ entièrement intérieure à V et appliquer l'identité de Green au volume V' limité par S et σ. Les fonctions Φ et $\frac{1}{r}$ étant régulières sur $V' + S + \sigma$, on trouvera

$$\int \frac{1}{r}\Delta\Phi\, dV' - \int \Phi\Delta\frac{1}{r}\, dV' + \int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}(dS + d\sigma) - \int \Phi\frac{d\frac{1}{r}}{dn}(dS + d\sigma) = 0, \quad \text{I.}$$

La seconde intégrale est encore nulle, la première intégrale étendue à σ, tendra vers zéro avec le rayon de σ, et la dernière intégrale étendue à σ, tendra vers la valeur Φ_P que multiplie l'intégrale de Gauss étendue à σ. La seconde intégrale étendue à S est égale à Φ_S que multiplie l'inté-

grale de Gauss. D'autre part, lorsque le rayon de σ tend vers zéro, la première intégrale tend vers la valeur qu'elle a pour $V' = V$. On obtient à la limite,

$$\int \frac{1}{r} \Delta\Phi \, dV + \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} \, dS - 4\pi(\Phi_S - \Phi_P) = 0, \quad I.$$

Si le point P *est sur la surface* S, on construira de nouveau la petite sphère σ. La deuxième intégrale double étendue à S donnera $-2\pi\Phi_S$, et l'intégrale en σ est à étendre seulement à la demi-sphère σ intérieure à S, ce qui donne $2\pi\Phi_P$. La relation, pour la surface S, est

$$\int \frac{1}{r} \Delta\Phi \, dV + \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} \, dS - 2\pi(\Phi_S - \Phi_P) = 0, \quad S.$$

Mais actuellement $\Phi_P = \Phi_S$, et cette discussion se résume par les relations

$$\int \frac{1}{r} \Delta\Phi \, dV + \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} \, dS = \begin{cases} 0, & E, \ S, \\ 4\pi(\Phi_S - \Phi_P), & S, \ I. \end{cases} \tag{85}$$

Les deux formules se raccordent naturellement sur la surface S.

Si $\Delta\Phi$ subit, sur une surface régulière intérieure à S, la discontinuité de première espèce signalée au paragraphe précédent, l'identité de Green n'en subsiste pas moins, comme nous l'avons vu au paragraphe 4. Les relations précédentes subsistent également. Sur la surface extérieure de la planète, la densité subit en général une discontinuité, il en est de même de $\Delta\Phi$; mais, comme nous venons de le voir, cela n'empêchera pas que l'on puisse prendre la surface de niveau S à l'extérieur de l'astre, pourvu qu'elle reste fermée.

44. **La transformation fondamentale.** — Le potentiel Φ de la pesanteur satisfait aux conditions requises pour l'application de l'identité de Green; les surfaces de niveau sont régulières, comme nous l'avons vu, sauf peut-être dans le plan de symétrie, et les relations (85) sont valables, que la surface S soit intérieure ou extérieure à l'astre, pourvu qu'elle soit toujours fermée.

Nous avions

$$\Phi = U + Q, \tag{86}$$

$$\Delta\Phi = -4\pi i\rho + 2\omega^2, \tag{87}$$

et le potentiel newtonien s'exprime ainsi :

$$U = i \int \frac{1}{r} \rho \, dV. \tag{88}$$

Tirons la densité ρ de l'équation (87) et portons-la dans (88). On trouve

$$U = \frac{\omega^2}{2\pi}\int \frac{1}{r}\,dV - \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\Delta\Phi\,dV.$$

Remplaçons la seconde intégrale par sa valeur extraite de (85)

$$U = \frac{\omega^2}{2\pi}\int \frac{1}{r}\,dV + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dn}\,dS + \begin{cases} 0, & E,\ S, \\ \Phi_P - \Phi_S, & S,\ I. \end{cases}$$

Puis remplaçons U par sa valeur extraite de (86). On trouvera

$$0 = \frac{\omega^2}{2\pi}\int \frac{1}{r}\,dV + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dn}\,dS + Q_P - \begin{cases} \Phi_P, & E,\ S, \\ \Phi_S, & S,\ I. \end{cases} \tag{89}$$

Faisons plus. Décomposons le volume total V en deux parties par une surface S de niveau. Soient C la cavité intérieure à S et Z la zone comprise entre S et la surface libre S_1. Si S est extérieur à l'astre, la cavité est plus grande que l'astre et la zone Z, qui devient soustractive, est remplie d'une densité nulle.

Le potentiel peut, en tout état de cause, être décomposé en deux parties relatives à C et à Z :

$$U = i\int \frac{1}{r}\,\rho\,dC + i\int \frac{1}{r}\,\rho\,dZ.$$

Faisons subir à la première intégrale seule la transformation fondamentale exposée ci-dessus. On obtient

$$U = i\int \frac{1}{r}\,\rho\,dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int \frac{1}{r}\,dC + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dn}\,dS + \begin{cases} 0, \\ \Phi_P - \Phi_S, \end{cases}$$

et remplaçons U par sa valeur $\Phi_P - Q_P$ à prendre au point potentié P :

$$0 = i\int \frac{1}{r}\,\rho\,dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int \frac{1}{r}\,dC + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dn}\,dS + Q_P - \begin{cases} \Phi_P, & E,\ S, \\ \Phi_S, & S,\ I. \end{cases}$$

Cette relation nous procurera une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre relatif.

45. **La condition nécessaire et suffisante.** — Reprenons la relation générale précédente exprimée pour l'intérieur d'une surface de niveau S, elle-même intérieure à l'astre

$$0 = i\int \frac{1}{r}\,\rho\,dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int \frac{1}{r}\,dC + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dn}\,dS + Q_P - \Phi_S, \quad I. \tag{90}$$

Il est bien entendu que ρ et Φ doivent être constantes sur S.

Jointe à la condition que la densité ne décroisse pas de la surface au centre, *la relation* (90) *représente la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre relatif.*

La condition est évidemment nécessaire, puisqu'elle est impliquée par les équations de l'équilibre, et par elles seules.

La condition est suffisante. En effet, en vertu de l'identité (85), on peut écrire

$$\int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\,dS = -\int \frac{1}{r}\Delta\Phi\,dV + 4\pi(\Phi_S - \Phi_P), \quad I,$$

et la relation (90), satisfaite par une fonction régulière Φ, donne

$$(91) \qquad o = \int \frac{1}{r}(2\omega^2 - \Delta\Phi)\,dC + 4\pi i \int \frac{1}{r}\rho\,dZ + 4\pi(Q_P - \Phi_P), \quad C.$$

Considérons alors une nouvelle surface de niveau S′, la cavité C′ et la zone Z′, correspondantes. On aura de même

$$(92) \qquad o = \int \frac{1}{r}(2\omega^2 - \Delta\Phi)\,dC' + 4\pi i \int \frac{1}{r}\rho\,dZ' + 4\pi(Q_P - \Phi_P), \quad C'.$$

Soustrayons membre à membre les deux équations précédentes, alors

$$o = \int \frac{1}{r}(2\omega^2 - \Delta\Phi - 4\pi i\rho)\,dZ'', \quad C'',$$

Z″ étant la zone comprise entre S et S′, et C″ la partie commune à C et à C′. Le potentiel créé par la densité $2\omega^2 - \Delta\Phi - 4\pi i\rho$ est donc nul à l'intérieur de C″ et cela, quelle que soit l'épaisseur de la zone Z″. A la limite, lorsque S′ tend vers S, c'est un potentiel de simple couche nul à l'intérieur de C. La couche est en équilibre électrostatique, elle doit être nulle partout, puisque le potentiel est nul dans le conducteur (*voir* § 9). On a donc, tout d'abord,

$$(93) \qquad \Delta\Phi = -4\pi i\rho + 2\omega^2$$

dans l'astre entier et la relation (92) donne, en vertu de (93),

$$o = i\int \frac{1}{r}\rho\,dC + i\int \frac{1}{r}\rho\,dZ + Q_P - \Phi_P$$

dans toute la planète, enfin cette relation s'écrit

$$\Phi = U + Q.$$

C'est l'équation de l'équilibre relatif; la proposition est démontrée.

Pour trouver les figures d'équilibre, il suffira donc de résoudre l'équation (90) au moyen d'une fonction Φ régulière au sens fort et

d'une fonction ρ régulière au sens faible et constantes sur les surfaces S. C'est une équation fonctionnelle d'un genre particulier.

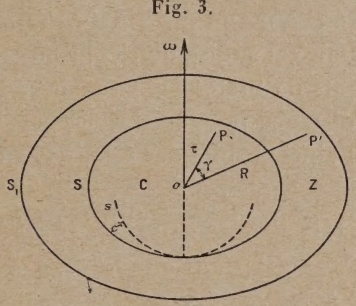
46. **La cavité et le desideratum de Tisserand.** — L'artifice précédent revient à creuser une cavité variable C à l'intérieur de l'astre et à remplacer la matière enlevée par une couche de niveau égale à la pesanteur $g = \frac{d\Phi}{dn}$ étalée sur la frontière de la cavité. L'équation à résoudre s'écrit alors

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}g\,dS + i\int\frac{1}{r}\rho\,dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int\frac{1}{r}dC + Q_P - \Phi_S = 0, \quad C. \tag{94}$$

Le premier membre est une fonction analytique dans la cavité.

En effet, il en est ainsi des trois potentiels, les deux premiers ne sont créés que par de la matière extérieure à la cavité ou sur la frontière, le troisième est celui d'une masse homogène. Ils sont tous trois analytiques dans la cavité, il en est de même de Q_P. Quant à Φ_S, c'est une constante pour une même cavité, elle est indépendante du point potentié.

Fig. 3.



Le premier membre est entièrement défini par son développement taylorien au voisinage d'un point de la cavité, du centre par exemple. *Pour que l'équation* (94) *soit satisfaite, il faut et il suffit que cet élément de fonction analytique soit identiquement nul au voisinage du centre, qui est intérieur, on le sait, à toutes les cavités.*

Cette remarque faite, divisons la cavité en une sphère s de même pôle que S et une marge C^+. Le potentiel de la masse homogène se calcule directement pour la sphère et il ne subsistera que le potentiel dû à la marge C^+. L'équation (94) devient

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}g\,dS + i\int\frac{1}{r}\rho\,dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int\frac{1}{r}dC^+ + \omega^2\left(t^2 + \frac{\tau^2}{2}\sin^2\theta - \frac{\tau^2}{3}\right) - \Phi_S = 0, \tag{95}$$

τ désignant le rayon vecteur du point potentié P, t le rayon de s et θ le complément de la latitude géocentrique.

Soient, enfin, R le rayon vecteur du point potentiant P′ et γ l'angle des deux rayons. On peut écrire

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\frac{\tau}{R}\right)^q X_q(\cos\gamma). \tag{96}$$

Le point P pourra être placé aussi près que l'on voudra de l'origine, tandis que le point P′ balaie C+, S et Z. Le rayon R sera, pour chaque surface S, supérieur à un nombre positif. On peut supposer que l'on a, relativement à chaque surface de niveau,

$$\frac{\tau}{R} < \frac{1}{2}.$$

Le développement (96) convergera absolument et uniformément dans la région où l'on a besoin de recourir à lui, région qui se réduit au voisinage du centre de l'astre.

Le desideratum de Tisserand est ainsi satisfait.

La condition nécessaire et suffisante s'exprimera maintenant par l'annulation des coefficients de toutes les puissances de τ après avoir remplacé l'inverse de la distance par son développement (96) dans l'équation (95). On obtient ainsi la suite des relations en nombre infini

$$\frac{1}{4\pi}\int X_q \frac{g}{R^{q+1}}\,dS + i\int X_q \frac{\rho}{R^{q+1}}\,dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int X_q \frac{1}{R^{q-1}}\,dC^+ = \begin{cases} \Phi_S - \omega^2 t^2 & \text{si } q = 0, \\ \dfrac{\omega^2}{3} X_2(\cos\theta) & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \ldots. \end{cases} \tag{97}$$

Ce tableau exprime, lui aussi, la condition nécessaire et suffisante d'équilibre.

47. **Équation de Poincaré et masse totale.** — Reprenons l'équation de Poisson pour le champ de la pesanteur (87) et intégrons les deux membres dans le volume V occupé par l'astre. Appliquons au premier membre la deuxième identité de Green (4), et désignons par M la masse totale. On obtient, comme nous le savons, l'équation de Poincaré :

$$\int g\,dS = +4\pi i M - 2\omega^2 V.$$

En subdivisant de nouveau le volume en une cavité C et une zone Z

nous trouverions, par le même procédé, l'équation suivante

$$(98) \qquad \frac{1}{4\pi}\int g\,dS + i\int \rho\,dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int d\mathrm{C}^+ = i\mathrm{M} - \frac{2}{3}\omega^2 t^3,$$

que nous appellerons « équation de Poincaré transformée ». Elle peut être incorporée au tableau (97). Elle figurerait en tête, car elle correspond à la valeur $q = -1$, en convenant de poser $\mathrm{X}_{-1} = 1$. Elle fournira M, mais il convient de remarquer qu'elle ne figure pas dans la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre relatif. Elle est cependant utile si la masse totale est supposée connue. Le tableau s'écrit maintenant

$$(99) \qquad \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{X}_q \frac{g}{\mathrm{R}^{q+1}}\,dS + - + - = \begin{cases} i\mathrm{M} - \frac{2}{3}\omega^2 t^3 & \text{si } q = -1, \\ \Phi_S - \omega^2 t^2 & \text{si } q = 0, \\ \frac{\omega^2}{3}\mathrm{X}_2(\cos\theta) & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \ldots. \end{cases}$$

Le premier membre est le même que dans le tableau précédent (97).

48. **Les éléments géométriques du problème.** — Envisageons une surface de niveau S et soit, comme précédemment, t son rayon polaire; il servira de paramètre pour distinguer les surfaces les unes des autres. Le rayon vecteur R allant de l'origine O, centre de l'astre, à un point M de S, sera la première coordonnée polaire. L'angle du rayon avec l'axe de rotation, ou complément θ de la latitude, sera la seconde coordonnée polaire, et la longitude ψ sera la troisième. Sur la surface t : $\mathrm{R} = \mathrm{R}(t, \theta, \psi)$.

Appelons ν l'angle de la normale extérieure N en M à S et du rayon OM prolongé. Les coordonnées de M sont avec les mêmes abréviations qu'au paragraphe 10 :

$$x = \mathrm{R}s\theta c\psi, \qquad y = \mathrm{R}s\theta s\psi, \qquad z = \mathrm{R}c\theta.$$

Les cosinus directeurs de OM sont :

$$\mathrm{M}_x = s\theta c\psi, \qquad \mathrm{M}_y = s\theta s\psi, \qquad \mathrm{M}_z = c\theta.$$

Les paramètres directeurs de N sont :

$$\mathrm{N}_x = \frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(\theta, \psi)}, \qquad \mathrm{N}_y = \frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(\theta, \psi)}, \qquad \mathrm{N}_z = \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\theta, \psi)}$$

et l'on a, par une propriété connue du produit intérieur,

$$c\nu = \frac{\mathrm{M}_x\mathrm{N}_x + \mathrm{M}_y\mathrm{N}_y + \mathrm{M}_z\mathrm{N}_z}{(\mathrm{N}_x^2 + \mathrm{N}_y^2 + \mathrm{N}_z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

On trouvera facilement la relation

$$\frac{1}{c^2\nu} = 1 + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{s^2\theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \psi}\right)^2. \tag{100}$$

Soit, maintenant, dn un élément de normale à la surface S en M compté positivement vers l'extérieur. Comme nous prendrons la pesanteur g positivement vers l'intérieur, il faut écrire ici

$$g = -\frac{d\Phi}{dn}.$$

Or, Φ ne dépend que du paramètre t de la surface S et l'on a

$$g = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{dn}.$$

Le segment de normale en M à S s'exprime au moyen de l'accroissement du rayon vecteur dû à une variation dt de t seul, donc à θ et ψ constants

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t}c\nu.$$

L'élément de surface dS s'exprime au moyen de l'angle solide élémentaire $d\Omega$ par la relation

$$R^2\, d\Omega = c\nu\, d\mathrm{S}.$$

L'élément de volume dZ s'exprime ainsi

$$d\mathrm{Z} = d\mathrm{S}\, dn \qquad \text{ou} \qquad d\mathrm{Z} = R^2\frac{\partial R}{\partial t}\, dt\, d\Omega.$$

Dans le tableau fondamental (99) le $c\nu$ n'intervient d'ailleurs que par l'inverse de son carré dans

$$g\, d\mathrm{S} = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{R^2\, d\Omega}{\dfrac{\partial R}{\partial t}c^2\nu}.$$

Enfin, pour simplifier, nous poserons

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{dt}, \qquad R' = \frac{\partial R}{\partial t}, \qquad H = 1 + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{s^2\theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \psi}\right)^2.$$

Une dérivée par rapport au paramètre t se marquera par l'accent ($'$) même s'il s'agit d'une dérivée partielle. Il faudra se rappeler cette convention.

49. **Transformation du système fondamental.** — En tenant compte

des expressions du paragraphe précédent, le système (99) s'écrit, le rayon polaire de la surface libre étant pris pour unité de longueur,

$$-\frac{1}{4\pi}\Phi'\int X_q H R^{1-q} R'^{-1} d\Omega + i\int_t^1 \rho\, dt \int X_q R^{1-q} R' d\Omega + \frac{\omega^2}{2\pi}\int X_q d\Omega \int_t^R R^{1-q}\, dR$$

$$= \begin{cases} iM - \frac{2}{3}\omega^2 t^3 & \text{si } q = -1, \\ \Phi - \omega^2 t^2 & \text{si } q = 0, \\ \frac{\omega^2}{3} X_2(c\theta) & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \ldots. \end{cases}$$

La dernière intégrale du premier membre est à prendre de la sphère de rayon t à la surface de niveau de paramètre t. On peut la calculer

$$\int_t^R R^{1-q}\, dR = \frac{1}{2-q} R^{2-q} - \frac{1}{2-q} t^{2-q} \qquad \text{si } q \neq 2.$$

Si $q = 2$ un logarithme népérien s'introduit

$$\int_t^R R^{1-q}\, dR = LR - Lt \qquad \text{si } q = 2.$$

Si $q = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ le second terme est orthogonal à X_q et disparaît; si $q = -1$ et si $q = 0$ le second terme fait disparaître le terme en ω^2 des seconds membres des équations correspondantes. Cette simplification s'impose. Nous convenons en outre de représenter par

$$\frac{1^+}{2-q} R^{2-q}$$

l'expression

$$\begin{cases} \frac{1}{2-q} R^{2-q} & \text{si } q \neq 2, \\ LR & \text{si } q = 2. \end{cases}$$

En plus, on peut intervertir les intégrales en t et en Ω, le tableau s'écrit alors

$$(101)\quad \frac{1}{4\pi}\int X_q \left[-\Phi' H R^{1-q} R'^{-1} + 4\pi i \int_t^1 \rho R^{1-q}\, dR + 2\omega^2 \frac{1^+}{2-q} R^{2-q} \right] d\Omega$$

$$= \begin{cases} iM & \text{si } q = -1, \\ \Phi & \text{si } q = 0, \\ \frac{\omega^2}{3} X_2(c\theta) & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \ldots. \end{cases}$$

Maintenant, si Y_n représente une fonction sphérique quelconque

d'ordre n, on a, comme on sait (*voir* § 11)

$$\frac{1}{4\pi}\int X_q(\cos\gamma)\,Y_n(\theta',\psi')\,d\Omega=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq q,\\ \dfrac{1}{2q+1}Y_q(\theta,\psi) & \text{si } n=q.\end{cases}$$

Le tableau précédent (101) exprime donc la valeur des fonctions sphériques d'ordre q du développement du crochet. Cette remarque donne lieu à une simplification. Nous représenterons par

$$\{A(t,\theta,\psi)\}_q$$

la fonction sphérique d'ordre q du développement en θ et ψ de A. Cette fonction de Laplace pourra, ainsi que A, dépendre du paramètre t. Dans le cas actuel, nous poserons en plus, pour simplifier

$$(102)\qquad \{R\}=-\Phi' HR^{1-q}R'^{-1}+4\pi i\int_t^1 \rho R^{1-q}R'\,dt+2\omega^2\frac{1^+}{2-q}R^{2-q},$$

et le tableau fondamental s'écrit

$$(103)\qquad \{R\}_q=\begin{cases} iM & \text{si } q=-1,\\ \Phi & \text{si } q=0,\\ \dfrac{5}{3}\omega^2 X_2(c\theta) & \text{si } q=2,\\ 0 & \text{si } q=1,3,4,5,\ldots.\end{cases}$$

50. **Un changement de fonction inconnue.** — On sait que la première équation, celle relative à $q=-1$ n'est pas essentielle, elle détermine la masse totale. Ce sont les relations relatives à $q=0,1,2,3,\ldots$ qui représentent la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre relatif. Parmi ces dernières, comme nous le verrons, celles qui correspondent à $q=1,2,3,\ldots$ déterminent la stratification; c'est-à-dire la forme des surfaces de niveau, tandis que l'équation relative à $q=0$ détermine le potentiel Φ par une équation différentielle du premier ordre. Il s'introduit alors une constante arbitraire. Cette constante peut être, si on le désire, déterminée à partir de la masse totale par l'équation relative à $q=-1$. Nous supprimerons à l'avenir cette équation de rang -1.

En plus, le théorème de M. Lichtenstein affirme l'existence d'un même plan équatorial de symétrie pour toutes les surfaces de niveau. *Pour les corps de révolution*, le développement de R ne peut contenir que les fonctions sphériques $X_{2n}(c\theta)$ d'ordre pair et il en est de même de l'accolade du tableau précédent. Les équations relatives à une valeur impaire de q sont superflues si l'on tient compte *a priori* de la symétrie.

Si la masse comporte trois plans de symétrie droite, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\psi=0$,

$\psi = \frac{\pi}{2}$, tels seraient les ellipsoïdes homogènes, les équations relatives $q = 1, 3, 5, \ldots$ sont encore satisfaites identiquement, car il n'y a que les fonctions sphériques fondamentales

$$X_{2n}^{2p}(c\theta)\, cp\psi \qquad (p = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

qui puissent intervenir dans le développement de $\{R\}$.

Il est vraisemblable que l'on peut inversement, pour les stratifications à connexion sphérique, déduire l'existence du plan de symétrie des équations $q = 1, 3, 5, 7, \ldots$.

Si l'on fait abstraction de toutes les équations de rang impair, on peut poser $q = 2p$ et le tableau s'écrit comme suit :

$$\{R\}_{2p} = \begin{cases} \Phi & \text{si } p = 0, \\ \frac{5}{2}\omega^2 X_2(c\theta) & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{si } p = 2, 3, 4, \ldots. \end{cases} \tag{104}$$

Lorsque l'indice p augmente, les exposants de R diminuent et sont négatifs dans $\{R\}_{2p}$. Mais il est bien facile de remédier à ce défaut pratique, il suffit de poser $r = R^{-2}$. L'étude des figures ellipsoïdales montrera combien cette substitution est avantageuse. En posant

$$2h = 4r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{s^2\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2,$$

le système fondamental s'écrit

$$\left\{\Phi' h r^{p-1} r'^{-1} - 2\pi i \int_t^1 \rho\, r^{p-2}\, dr - \omega^2 \frac{1^+}{p-1} r^{p-1}\right\}_{2p} = \begin{cases} \Phi, \\ \frac{5}{2}\omega^2 X_2(c\theta), \\ 0, \end{cases} \tag{105}$$

pour les mêmes valeurs de p que ci-dessus, tableau (104).

51. Cas particulier de la masse homogène et des ellipsoïdes. — Si la masse est homogène, les surfaces d'égale densité disparaissent à l'intérieur du fluide, mais les surfaces d'égale pression subsistent et en sont la trace. Par stratification d'une masse homogène, il faut entendre la répartition des surfaces d'égale pression. Le système précédent s'écrit alors, débarrassé de l'intégrale en t,

$$\left\{\Phi' h r^{p-1} r'^{-1} - 2\pi i \rho \frac{1^+}{p-1} r_1^{p-1} + (2\pi i \rho - \omega^2)\frac{1^+}{p-1} r^{p-1}\right\}_{2p} = \begin{cases} \Phi, & \text{si } p = 0, \\ \frac{5}{3}\omega^2 X_2(c\theta), & \text{si } p = 1, \\ 0, & \text{si } p = 2, 3, 4, \ldots. \end{cases} \tag{106}$$

Le système (103) se simplifierait également pour une masse homogène.

L'indice 1 affecte toujours ce qui a trait à la surface libre. Ces équations régissent les figures d'équilibre d'une masse homogène à connexion sphérique.

Pour une stratification ellipsoïdale, on a, α, β, γ étant des fonctions de t seul,

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1.$$

En passant aux coordonnées polaires r, θ et ψ, on trouve

$$r = (\alpha c^2\psi + \beta s^2\psi)s^2\theta + \gamma c^2\theta,$$
$$h = (\alpha^2 c^2\psi + \beta^2 s^2\psi)s^2\theta + \gamma^2 c^2\theta.$$

Pour $p > 1$, $\{r^{p-1}\}_{2p}$ ne contient que des fonctions sphériques inférieures à $2p$, comme nous l'avons vu au paragraphe 12. On a donc

$$\{r^{p-1}\}_{2p} \equiv 0 \qquad (p > 1).$$

Pour avoir de même

$$\{hr^{p-1}r'^{-1}\}_{2p} \equiv 0,$$

il suffira que la stratification soit homothétique. Les équations relatives à $p = 2, 3, 4, \ldots$ sont alors identiquement satisfaites. Les équations relatives à $p = 0$ et $p = 1$ donnent ensuite les formules classiques qui lient le rapport des axes au quotient $\frac{\omega^2}{\rho}$. On retrouve ainsi par une nouvelle méthode la théorie des ellipsoïdes de *Maclaurin* et de *Jacobi* (1).

52. **Remarques sur la stratification d'une masse hétérogène.** — En dérivant les équations (105) par rapport à t, on trouve, pour $p > 1$, un crochet ayant même sens qu'une accolade

$$\Phi''[hr^{p-1}r'^{-1}]_{2p} + \Phi'[hr^{p-1}r'^{-1}]'_{2p} + (2\pi i\rho - \omega^2)[r^{p-2}r']_{2p} = 0,$$

puis en éliminant Φ'', Φ' et $2\pi i\rho - \omega^2$, on obtient la nouvelle relation qui exprime une propriété de la stratification

$$\begin{vmatrix} [hr^{p-1}r'^{-1}]_{2p} & [hr^{p-1}r'^{-1}]'_{2p} & [r^{p-2}r']_{2p} \\ [hr^{p'-1}r'^{-1}]_{2p'} & [hr^{p'-1}r'^{-1}]'_{2p'} & [r^{p'-2}r']_{2p'} \\ [hr^{p''-1}r'^{-1}]_{2p''} & [hr^{p''-1}r'^{-1}]'_{2p''} & [r^{p''-2}r']_{2p''} \end{vmatrix} \equiv 0$$

et qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs supérieures à l'unité de p, p', p''. C'est une condition nécessaire et purement géométrique.

La surface libre a été supposée de connexion sphérique. La pesan-

(1) *Voir* P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. IV, Chap. III.

teur n'y serait nulle en un point que si elle était nulle en tous les points de cette surface, ce qui n'est pas possible, car sur l'axe de rotation, la pesanteur n'est pas nulle, cela résulte de l'existence du plan de symétrie.

On a donc $\Phi'_1 \neq 0$, et comme Φ' est une fonction continue, on a encore $\Phi' \neq 0$ pour des valeurs de t allant de 1 à une valeur plus grande t^+. La surface libre est donc entourée d'un nimbe dont l'épaisseur est différente de zéro partout, formée par les surfaces fermées et régulières à Φ constant. Quand ces surfaces de niveau se rapprochent de la surface libre, le rayon R et sa dérivée R' restent continus, même au travers de la surface libre $t = 1$; c'est la dérivée seconde R'' qui subirait une discontinuité. On ferait les mêmes remarques pour r, r' d'une part, et r'' d'autre part. Cette discontinuité est due au fait que la densité fait en général un saut sur la surface libre. Dans le nimbe en question, la densité est nulle et le tableau (105) toujours applicable s'écrit :

$$\left[\Phi' h r'^{-1} r^{p-1} - \omega^2 \frac{1^+}{p-1} r^{p-1}\right]_{2p} = \begin{cases} \Phi & \text{si } p = 0, \\ \frac{5}{3}\omega^2 X_2(c\theta) & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{si } p = 2, 3, 4, \ldots. \end{cases}$$

Les équations relatives à $p = 2, 3, 4, \ldots$, donnent

$$\Phi'[h r^{p-1} r'^{-1}]_{2p} = \frac{\omega^2}{p-1}[r^{p-1}]_{2p}.$$

Maintenant, si l'on donne à p une seconde valeur p', on obtiendra une autre relation de même forme et par division

$$(p-1)\frac{[h r^{p-1} r'^{-1}]_{2p}}{[r^{p-1}]_{2p}} = (p'-1)\frac{[h r^{p'-1} r'^{-1}]_{2p'}}{[r^{p'-1}]_{2p'}}.$$

Cette relation, d'ordre strictement géométrique, doit être satisfaite pour toutes les valeurs de p et de p' supérieures à l'unité.

Des relations semblables existent avec le rayon R et l'indice q.

CHAPITRE V.

LES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

53. **Le principe des approximations.** — Dans leurs remarquables travaux sur les figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène, Clairaut, Laplace, Poincaré, ont négligé systématiquement les termes d'un ordre supérieur au carré de la vitesse angulaire. Ce procédé, tout à fait légitime pour des rotations lentes comme celle du Soleil, n'est déjà plus suffisant pour le cas de la Terre où l'influence des termes d'ordre 4 commence à se faire sentir, et c'est jusqu'à l'ordre 6 qu'il conviendrait de poursuivre les approximations dans le cas de Jupiter et de Saturne, si l'on voulait comparer avec précision les chiffres relatifs à la forme et à la rotation de ces astres, et expliquer en plus les anomalies du mouvement des satellites.

J'appellerai « première approximation » celle où l'on tient compte des termes de l'ordre de ω^2 et où l'on néglige les termes d'ordre supérieur. La deuxième approximation consistera à tenir compte des termes en ω^2 et ω^4 mais à négliger les termes d'ordre supérieur, etc. ; ω étant, comme toujours, la vitesse angulaire.

Le système fondamental (103) s'écrit, y compris l'équation de Poincaré,

$$(107)\qquad \{\mathrm{R}\}_q = \begin{cases} iM & \text{si } q = -1. \\ \Phi & \text{si } q = 0, \\ \frac{5}{3}\omega^2 \mathrm{X}_2(c\theta) & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Mettons en évidence, dans l'expression du rayon vecteur, le rayon t de la sphère de même pôle que la surface de niveau

$$(108)\qquad \mathrm{R} = t(1 + e).$$

La fonction e de t, θ et ψ s'appellera la déformation à partir de la sphère t. La quantité te représente l'excès du rayon vecteur sur le rayon de la sphère. La déformation sera toujours nulle sur l'axe polaire.

Développons e formellement en série de puissance de ω^2

$$e = \omega^2 e^{(1)} + \omega^4 e^{(2)} + \omega^6 e^{(3)} + \ldots + \omega^{2n} e^{(n)} + \ldots. \tag{109}$$

Il n'y a pas lieu d'introduire un terme en ω^0 car pour $\omega = 0$ la stratification est sphérique en vertu du théorème de M. Lichtenstein.

Le potentiel de la pesanteur se développera d'une manière analogue

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \omega^2 \Phi^{(1)} + \omega^4 \Phi^{(2)} + \ldots + \omega^{2n} \Phi^{(n)} + \ldots. \tag{110}$$

Quant à la fonction $\rho(t)$, elle sera considérée comme donnée, les inconnues étant $e(t, \theta, \psi)$ et $\Phi(t)$. Si maintenant l'on substitue les développements (109) et (110) aux fonctions e et Φ dans le système (107), on obtiendra une expression formelle que l'on pourra ordonner suivant les puissances de ω^2 et relativement à toute valeur de q. Ces équations revêtiront la forme symbolique

$$\omega^0 F_q^{(0)} + \omega^2 F_q^{(1)} + \omega^4 F_q^{(2)} + \ldots = 0. \tag{111}$$

Les fonctions F ne dépendent plus de ω. Il est à remarquer que $F_q^{(0)}$ ne peut contenir que $\Phi^{(0)}$ et $\rho(t)$; $F_q^{(1)}$ ne peut contenir que $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$, $e^{(1)}$ et $\rho(t)$; $F_q^{(2)}$ ne peut contenir que $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ et $\rho(t)$, etc. Par équation à ω^{2n} près, nous entendons les relations

$$\omega_0 F_q^{(0)} + \omega^2 F_q^{(1)} + \ldots + \omega^{2n-2} F_q^{(n-1)} = 0, \tag{112}$$

dans lesquelles sont négligés les termes en ω^{2n} ainsi que ceux d'ordre supérieur. Revenons à l'expression symbolique (111). Nous considérerons ω comme une nouvelle variable et la relation (111) devra avoir lieu quelles que soient ω, t, θ, ψ. Ceci nous oblige à annuler toutes les fonctions $F_q^{(n)}$. L'approximation d'ordre zéro consiste à poser $F_q^{(0)} = 0$. Ces relations établiront simplement les formules connues pour des couches sphériques concentriques et le potentiel $\Phi^{(0)}$ qu'elles créent; potentiel qui se confond, dans ce cas, avec celui de Newton.

L'approximation d'ordre 1 consistera à écrire $F_q^{(1)} = 0$. Ces équations lieront les fonctions $e^{(1)}$ et $\Phi^{(1)}$ aux fonctions $\Phi^{(0)}$ et $\rho(t)$. Elles indiqueront la déformation de l'ordre ω^2 et l'altération $\Phi^{(1)}$ du champ de la pesanteur, qui proviennent toutes deux du fait que l'astre est supposé tourner lentement. Le système $F_q^{(1)} = 0$ résume, comme on le verra, la théorie classique.

L'approximation d'ordre 2 consistera à écrire $F_q^{(2)} = 0$. Ces relations lieront les fonctions $e^{(2)}$ et $\Phi^{(2)}$ aux fonctions $e^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(0)}$ et $\rho(t)$ obtenues par les approximations précédentes, elles indiqueront la correction

à faire subir à la première approximation, correction de l'ordre de ω^4; etc.

Après la première approximation, la déformation e et le potentiel Φ s'écriront

$$e = \omega^2 e^{(1)} \qquad \text{et} \qquad \Phi = \Phi^{(0)} + \omega^2 \Phi^{(1)} + \omega^4 \Phi^{(2)}.$$

Après la seconde approximation, ces fonctions s'écriront

$$e = \omega^2 e^{(1)} + \omega^4 e^{(2)} \qquad \text{et} \qquad \Phi = \Phi^{(0)} + \omega^2 \Phi^{(1)} + \omega^4 \Phi^{(2)}.$$

54. Remarques. — Les approximations successives constituent un procédé itératif ou plus exactement récurrent, dans ce sens que les fonctions $e^{(n)}$ et $\Phi^{(n)}$ seront déterminées par les fonctions de rang moins élevé $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n-1)}$ et $\Phi^{(0)}; \Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(n-1)}$ obtenues précédemment. Les approximations d'ordre 0, 1, 2, ne fourniront que des surfaces de révolution et il en sera de même des suivantes. Mais cela ne veut pas dire que la résolution simultanée des équations (111) ou même des équations (112) ne fournissent également que des surfaces de révolution. Car le procédé récurrent employé revient à considérer tout d'abord la vitesse angulaire comme nulle, puis à animer la masse d'une petite rotation, telle que les termes en ω^2 puissent être seuls pris en considération, puis une rotation un peu plus forte qui mette en jeu les termes en ω^4, etc. Le principe de raison suffisante vient confirmer cette proposition; en effet, dans cet astre qui est supposé partir du repos absolu et de l'état sphérique et qui s'anime d'une rotation croissante, il n'y a aucune raison pour qu'une dissymétrie se manifeste à une longitude plutôt qu'à une autre. Cette remarque devait être faite, et les figures d'équilibre que nous trouverons répondent d'avantage à un astre primitivement assez étendu (nébuleuse), qui s'est concentré petit à petit, en tournant de plus en plus vite pour que le moment cinétique reste constant, qu'à une planète dont la rotation aurait diminué au cours des siècles à cause d'un freinage comme celui que les marées exercent.

Nous dirons par exemple qu'en première et seconde approximation, les figures sont de révolution. Mais cela n'exclut pas absolument que la Terre ait une forme légèrement polyédrale; cela montre simplement que si cette forme, d'ailleurs invraisemblable, existe réellement, c'est que la Terre a diminué de vitesse angulaire sous l'influence d'astres perturbateurs comme la Lune et le Soleil.

L'étude de la stratification au voisinage de l'ensemble de densité maximum est fort délicate si l'on se refuse à admettre quelques hypothèses supplémentaires sur la répartition des densités.

Dans son livre sur les figures d'équilibre, Poincaré rejette *a priori* que la déformation des couches puisse devenir infinie. Cette hypothèse est nécessaire si l'on veut que la méthode des approximations s'applique, car si la déformation $e^{(1)}$ devenait infinie au voisinage du centre, le terme $\omega^2 e^{(1)}$ ne pourrait être envisagé comme de l'ordre de ω^2. Nous rejetons également *a priori* qu'un des coefficients $e^{(n)}$ puisse devenir infini au voisinage du centre.

S'il s'agit d'une recherche des figures stables, cette hypothèse est encore plus légitime, car la forme générale de l'astre ne peut pas dépendre de la manière dont se comportent les densités dans un volume plus petit qu'une tête d'épingle placée au centre de l'astre.

Pour les figures instables, il est bon de remarquer que l'on exclut ainsi le cas où la stratification tendrait en forme vers un segment de droite, ou encore un cercle, quand on se rapproche du centre.

55. **L'approximation d'ordre n.** — Dans le tableau (107) remplaçons R par $t(1+e)$ et développons e et Φ en série procédant suivant les puissances de ω^2 comme nous l'indiquions au paragraphe 53. La fonction $e^{(n)}$ apparaît pour la première fois à l'approximation d'ordre n où elle figure linéairement. Nous poserons

$$\{e\}_q = \Phi'_0 t^{1-q}\left(qe + t\frac{\partial e}{\partial t}\right) + 4\pi i \int_t^1 \rho\, d(et^{2-q}). \tag{113}$$

Le système fondamental s'écrit alors, il n'y a pas de grande difficulté à le vérifier, sous la forme suivante pour $n > 2$:

$$\{e^{(n)}\}_q = -\{R_{n-1}\}_q^{2n} + \begin{cases} t^2\dfrac{d\Phi^n}{dt} & \text{si } q = -1, \\ t\dfrac{d\Phi^n}{dt} + \Phi^n & \text{si } q = 0, \\ 0 & \text{si } q = 1, 2, 3, 4, \ldots. \end{cases} \tag{114}$$

Dans l'accolade en R du second membre, l'indice inférieur $n-1$ rappelle qu'il faut remplacer R par sa valeur après la $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation

$$R_{n-1} = t[1 + \omega^2 e^{(1)} + \ldots + \omega^{2n-2} e^{(n-1)}]$$

et l'indice supérieur $2n$ indique qu'il ne faut considérer dans cette accolade que le coefficient de ω^{2n}.

La fonction $e^{(n)}$ peut être développée en une série de fonctions sphériques, mais seule la fonction sphérique d'indice q interviendra dans

l'accolade du premier membre; il faut poser

$$e^{(n)} = e_q^{(n)} X_q(c\theta) + \sum_{p=1}^{n} e_{q,p}^{(n)} X_n^{(p)}(c\theta) cp\psi + \sum_{p=1}^{n} e_{q,-p}^{(n)} X_n^{(p)}(c\theta) sp\psi.$$

Le tableau doit être satisfait quelles que soient les valeurs de θ et ψ. On peut donc procéder à une identification suivant chaque fonction sphérique fondamentale. Le système s'écrit, toujours pour $n > 2$,

$$(115) \qquad \{ e_{q,p}^{(n)} \} = -\{ R_{n-1} \}_{q,p}^{2n} + \begin{cases} t^2 \dfrac{d\Phi^n}{dt} & \text{si } q = -1, \quad p = 0, \\ \Phi^n + t \dfrac{d\Phi^n}{dt} & \text{si } q = 0, \quad p = 0, \\ 0 & \text{pour toutes les autres combinaisons.} \end{cases}$$

Les équations sont les mêmes avec $-p$.

L'accolade en R d'indice q, p indique qu'il faut prendre le coefficient de la fonction sphérique q, p dans le coefficient de ω^{2n}.

Il importerait de démontrer que les fonctions $e^{(n)}$ sont dominées par des nombres ω_+^{-2n} à partir d'un certain rang

$$(116) \qquad | e^{(n)} | < \omega_+^{-2n}$$

pour prouver la convergence des approximations successives. Si, en effet, la relation (116) pouvait être établie, la série

$$e = \omega^2 e^{(1)} + \omega^4 e^{(2)} + \ldots + \omega^{2n} e^{(n)} + \ldots$$

serait convergente pour $0 \leq \omega < \omega_+$. Je n'ai pas recherché cette démonstration.

Les tableaux (114) et (115) ont l'avantage d'expliciter le procédé récurrent dont il était question au paragraphe 54.

56. **Un raisonnement par récurrence.** — Désirant réunir en tête de ce Chapitre ce qui concerne l'approximation d'ordre quelconque, j'invoquerai un résultat qui ne sera démontré qu'au paragraphe 59; c'est d'ailleurs un théorème de Laplace. En première approximation, la déformation est

$$e^{(1)} = e_0^{(1)}(t) X_0 + e_2^{(1)}(t) X_2(c\theta);$$

elle ne dépend que de t et de θ et n'introduit que les polynomes X_0 et X_2.

Voici ensuite quatre remarques :

1° La déformation $e^{(2)}$ se calcule à partir de $e^{(1)}$. Les seconds membres

des équations seront indépendants de la longitude ψ et par conséquent tous les termes du premier membre avec $p \neq 0$ correspondront à des seconds membres nuls.

2° La fonction

$$\left(\frac{\partial X_q(c\theta)}{\partial \theta}\right)^2$$

est un polynome d'ordre q en $c^2\theta$ et par conséquent il s'exprime à son tour par une somme de polynomes de Legendre d'ordre pair X_0, X_2, ..., X_{2q}.

3° Les seconds membres de (115) ne contiendront que des termes pairs en $c\theta$ convertibles à leur tour en polynomes d'ordre pair X_0, $X_2(c\theta)$, ... Dans le tableau (115), les seconds membres seront donc nuls pour toutes les valeurs impaires de q.

4° On sait qu'un produit de polynomes de Legendre d'ordre q_1, q_2, ..., q_n est un polynome d'ordre $q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ en $c\theta$ qui s'exprime à son tour par une somme de polynomes de Legendre jusqu'à l'ordre $q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ au plus. Ceci étant, supposons que les fonctions $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ..., $e^{(n-1)}$ soient respectivement des sommes de polynomes de Legendre d'ordre 2, 4, ..., $2n - 2$ au plus.

Je dis que $e^{(n)}$ sera une somme de polynomes d'ordre $2n$ au plus.

En effet, reportons-nous au tableau (115) du paragraphe précédent. Dans le second membre, R doit être remplacé par

$$R = t\left[1 + \omega^2 e^{(1)} + \ldots + \omega^{2n-2} e^{(n-1)}\right]$$

et dans l'accolade en R, il ne faudra retenir que le coefficient de ω^{2n}. Dans les différents termes qui le constituent, les fonctions $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ..., $e^{(n-1)}$ ne peuvent figurer que multipliées par les puissances de ω^2 correspondantes; la somme des indices de ces fonctions dans un produit ne pourra dépasser $2n$.

Et cela est vrai, même si l'on tient compte des termes en $\frac{\partial X_q}{\partial \theta}$ qui figureront dans l'accolade en R par l'intermédiaire de H, paragraphe 49.

Alors, en vertu de la remarque 4°, les seconds membres de $e^{(n)}$ ne contiendront aucune fonction sphérique d'ordre supérieur à $2n$.

En résumé, les seconds membres du tableau (115) seront nuls si l'une des circonstances suivantes se produit $p \neq 0$; q impair à part $q = -1$ et $q > 2n$.

Les équations revêtent alors la forme

$$\left\{ e^{(n)}_{q,p} \right\} = 0.$$

Nous ferons voir au paragraphe suivant que ces équations n'admettent pas d'autres solutions que $e_{q,p}^{(n)} \equiv 0$.

Dès lors, tous les coefficients $e_{q,p}^{(n)}$ seront nuls identiquement, sauf si l'on a $p = 0$, $q = 0, 2, 4, \ldots, 2n$.

La déformation $e^{(n)}$ s'écrit

$$e^{(n)} = e_0^{(n)} X_0 + e_2^{(n)} X_2 + \ldots + e_{2n}^{(n)} X_{2n},$$

et la déformation totale est, après la $n^{\text{ième}}$ approximation,

$$\begin{aligned} e = \quad & \omega^2 [e_0^{(1)} + e_2^{(1)} X_2] \\ & + \omega^4 [e_0^{(2)} + e_2^{(2)} X_2 + e_4^{(2)} X_4] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \omega^{2n} [e_0^{(n)} + e_2^{(n)} X_2 + \ldots + e_{2n}^{(n)} X_{2n}]. \end{aligned}$$

Laplace et Poincaré ont établi que la déformation est en première approximation

$$e = \omega^2 [e_0^{(1)} + e_2^{(1)} X_2].$$

En plus, Legendre a indiqué pour la seconde approximation la forme générale

$$e = r_{10} X_0 + r_{12} X_2 + r_{14} X_4.$$

L'analyse précédente permet de conclure :

La déformation, après la $n^{\text{ième}}$ approximation, procède suivant les polynomes de Legendre $X_0(c\theta)$, $X_2(c\theta)$, $X_4(c\theta)$ jusqu'à $X_{2n}(c\theta)$.

Nous avons démontré en même temps que les surfaces sont de révolution et présentent le plan de symétrie $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ce dernier résultat pouvait être d'ailleurs prévu par le théorème de M. Lichtenstein.

57. **L'équation homogène.** — L'équation $\{e_{q,p}^{(n)}\} = 0$ s'écrit en supprimant les indices :

$$\Phi'_0 t^{1-q} (qe + te') + 4\pi i \int_t^1 \rho \, d(et^{2-q}) = 0.$$

La dérivée Φ'_0 n'est autre que la pesanteur changée de signe, créée par des sphères concentriques. Soit $D(t)$ la densité moyenne de la matière intérieure à la sphère de rayon t. On a (*voir* § 58)

$$\Phi'_0 = -\frac{4}{3}\pi i t D.$$

L'équation en e s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{3} D t^{2-q} (qe + te') = \int_t^1 \rho t^{1-q} [(2-q)e + te'] dt. \tag{117}$$

Montrons qu'elle n'admet pas d'autre solution bornée au voisinage de l'origine que $e \equiv 0$, si $q = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Différentions la relation (117), on trouve facilement

$$(118) \qquad (3+q)(2-q)\mathrm{D}e + t(2\mathrm{D}'e + 6\rho e' + t\mathrm{D}e'') = 0.$$

En posant $\eta = t\frac{e'}{e}$ l'équation (117) s'écrit d'autre part

$$(119) \qquad \frac{1}{3}\mathrm{D}t^{2-q}e(q+\eta) = \int_t^1 \rho t^{1-q} e(\eta - q + 2)\,dt.$$

On sait qu'on peut faire $t > 1$ et que ρ est nul de 1 à t, dans ce cas. A l'extérieur de l'astre la relation se réduit donc à

$$e(q+\eta) \equiv 0.$$

1° Si $e \equiv 0$, on a $e' \equiv 0$ à l'extérieur et sur la surface libre $t = 1$, mais alors l'équation différentielle (118) n'admet pas d'autre solution à l'intérieur $t < 1$ que $e \equiv 0$ qui réponde à ces conditions de Cauchy aux limites.

Rappelons que c'est la dérivée seconde seule qui subit une discontinuité au travers de la surface libre.

2° Si $q + \eta \equiv 0$, alors posons $\eta = -q + \eta^+$ et l'on a $\eta^+ = 0$ pour $t = 1$. Dans ce cas e n'est pas nul pour $t = 1$. L'équation (119) s'écrit

$$\frac{1}{3}\mathrm{D}t^{2-q}e\eta^+ = \int_t^1 \rho t^{1-q} e(\eta^+ + 2 - 2q)\,dt.$$

Si $q = 1$ l'équation n'admet pas d'autre solution que $\eta^+ \equiv 0$, en effet, si η^+ s'annule pour $t = 1$ comme $(t-1)^m$ dans le second membre, elle s'annulerait comme $(t-1)^{m+1}$ dans le premier, ce qui est absurde.

Si $q > 1$, la parenthèse du second membre est négative pour t voisin de 1 ; il en sera de même de η^+ puisque D est positif et cela quel que soit le signe de e qui figure en facteur dans les deux membres. La fonction η^+ restant négative lorsque t diminue, la parenthèse restera négative et cela jusqu'à $t = 0$. On aurait donc

$$\eta^+ \leqq 0, \qquad \eta \leqq -q, \qquad \frac{e'}{e} \leqq -\frac{q}{t}, \qquad \mathrm{L}\frac{e_1}{e} \leqq -q\,\mathrm{L}\frac{1}{t},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{e}{e_1} \geqq \left(\frac{1}{t}\right)^q.$$

Cette relation est inadmissible, car e augmenterait au delà de toute limite quand on se rapproche du centre de l'astre.

Il ne reste que la possibilité 1° qui implique $e \equiv 0$.

58. **L'approximation d'ordre zéro.** — Identifions les termes indépendants de ω dans le système (115). Il ne subsiste que deux équations, celles relatives à $q = -1$ et $q = 0$. Ce sont :

$$-t^2\frac{d\Phi^0}{dt} = iM - 4\pi i\int_t^1 \rho t^2\,dt,$$

$$\Phi^{(0)} + t\frac{d\Phi^{(0)}}{dt} = 4\pi i\int_t^1 \rho t\,dt.$$

La déformation est nulle et la pesanteur s'écrit

$$g^{(0)} = -\frac{d\Phi^{(0)}}{dt} = 4\pi i t^{-2}\int_0^t \rho t^2\,dt. \tag{120}$$

Si D est la densité moyenne des sphères intérieures à la sphère t, on a

$$D = 3t^{-3}\int_0^t \rho t^2\,dt. \tag{121}$$

En rapprochant (120) et (121), on trouve les expressions que nous utiliserons plus tard :

$$g^{(0)} = \frac{4}{3}\pi i t D, \tag{122}$$

$$\rho = D + \frac{1}{3}tD'. \tag{123}$$

59. **L'approximation d'ordre un.** — L'identification des termes en ω^2 donne le système suivant qui domine la théorie classique :

$$\left\{e^{(1)}_{q,p}\right\} = \begin{cases} -\frac{2}{3}t^3 + t^2\frac{d\Phi^{(1)}}{dt} & \text{si } q = -1 \text{ et } p = 0, \\ -t^2 + \Phi^{(1)} + t\frac{d\Phi^{(1)}}{dt} & \text{si } q = 0 \text{ et } p = 0, \\ \frac{5}{3} & \text{si } q = 2 \text{ et } p = 0, \\ 0 & \text{pour tous les autres coefficients } e^{(1)}_{q,p}. \end{cases} \tag{124}$$

La dernière ligne exprime le *théorème de Laplace*, l'avant-dernière n'est autre que l'*équation fondamentale de Clairaut*, enfin les deux premières qui ne seront reprises que plus tard, fournissent une *équation de d'Alembert*.

La déformation s'écrit donc, puisque les $e^{(1)}_{q,p}$ sont nuls pour $p \neq 0$ et pour $q = 1, 3, 4, 5, \ldots$,

$$e^{(1)} = e^{(1)}_0 + e^{(1)}_2 X_2(c\theta).$$

Sur l'axe polaire $\theta = 0$, on doit avoir $e^{(1)} = 0$, mais on peut écrire

$$e^{(1)} = e_0^{(1)} + e_2^{(1)} - \frac{3}{2} e_2^{(1)} s^2 \theta.$$

Il faut donc que l'on ait $e_0^{(1)} + e_2^{(1)} = 0$. Posons

$$a = \frac{3}{2} e_0^{(1)} = -\frac{3}{2} e_2^{(1)}.$$

La déformation s'écrit

$$e^{(1)} = a(t) s^2 \theta. \tag{125}$$

On vérifie aisément par la géométrie élémentaire qu'il n'y a que des ellipsoïdes de révolution qui répondent à cette déformation.

En première approximation, la stratification est composée d'ellipsoïdes de révolution. C'est le théorème de Laplace.

L'équation relative à $q = 2$ donne en a

$$\mathrm{D}(2a + ta') = \frac{15}{8\pi i} + 3\int_t^1 \rho a' \, dt. \tag{126}$$

Cette relation dérivée par rapport à t fournit l'*équation de Clairaut* liant les variations de l'aplatissement à la densité :

$$2\mathrm{D}'a + 6\rho a' + t\mathrm{D}a'' = 0. \tag{127}$$

Si l'on remplace ρ par sa valeur (122), on retrouve l'équation en D du paragraphe 38. La discussion de l'équation (126) sera entreprise au Chapitre suivant.

60. **L'approximation d'ordre deux.** — L'identification des termes en ω^4 du tableau (115) donne

$$\begin{aligned}\left\{ e_{q,p}^{(2)} \right\} = &- \frac{d\Phi^1}{dt} t^{1-q} \left[q e^{(1)} + t \frac{de^{(1)}}{dt} \right]_{q,p} - 2 t^{2-q} e_{q,p}^{(1)} \\ &+ \frac{d\Phi^{(0)}}{dt} t^{1-q} \mathrm{G}_{q,p}(e^{(1)}) - 4\pi i \int_t^1 \rho t^{1-q} \mathrm{H}_{q,p}(e^{(1)}) \, dt \\ &+ \begin{cases} t^2 \dfrac{d\Phi^2}{dt} & \text{si } q = -1 \text{ et } p = 0, \\ \Phi^{(2)} + t \dfrac{d\Phi^{(2)}}{dt} & \text{si } q = 0 \quad \text{et } p = 0, \\ 0 & \text{pour toutes les autres combinaisons } q, p. \end{cases}\end{aligned} \tag{128}$$

Les fonctions G et H sont quadratiques en e

$$G(e) = \frac{1}{2} q(q+1)e^2 + (q+1)et\frac{\partial e}{\partial t} + \left(t\frac{\partial e}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{s^2\theta}\left(\frac{\partial e}{\partial \psi}\right)^2,$$

$$H(e) = \frac{1}{2}(q-1)(q-2)e^2 + (1-q)et\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Par $G_{q,p}$ et $H_{q,p}$ nous entendons évidemment le coefficient de la fonction sphérique q, p dans le développement de ces expressions. A part les termes en $\Phi^{(2)}$ sous l'accolade, les premiers membres sont calculables à partir de la première approximation. On les calculera sans difficulté théorique à partir de l'expression $e^{(1)} = as^2\theta$. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}
(129)\quad & -\frac{d\Phi^0}{dt} t^{1-q}\left(qe + t\frac{de}{dt}\right) - 4\pi i \int_t^1 \rho\, t^{1-q}\left[(2-q)e + t\frac{de}{dt}\right] dt \\
&= \text{à} + \frac{2}{3} t^2 \frac{d\Phi^{(1)}}{dt}(-a + ta') - \frac{8}{15} t^2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dt}[a^2 + (ta')^2] + \frac{4}{3} t^3 a - t^2 \frac{d\Phi^{(2)}}{dt} \\
&\quad + \frac{8}{15} 4\pi i \int_t^1 \rho\, d(a^2 t^3) \qquad \text{pour } q = -1 \text{ et } e = e_0^{(2)}; \\
&\text{à} + \frac{2}{3} t \frac{d\Phi^{(1)}}{dt} ta' - \frac{8}{15} t \frac{d\Phi^{(0)}}{dt}[a^2 + ata' + (ta')^2] \\
&\quad + \frac{4}{3} t^2 a - t \frac{d\Phi^{(2)}}{dt} - \Phi^{(2)} \\
&\quad + \frac{4}{15} 4\pi i \int_t^1 \rho\, d(a^2 t^2) \qquad \text{pour } q = 0 \text{ et } e = e_0^{(2)}; \\
&\text{à} - \frac{2}{3} t^{-1} \frac{d\Phi^{(1)}}{dt}(2a + ta') + \frac{8}{21} t^{-1} \frac{d\Phi^{(0)}}{dt}[5a^2 + 6ata' + 2(ta')^2] - \frac{4}{3} a \\
&\quad + \frac{8}{21} 4\pi i \int_t^1 \rho\, d(a^2) \qquad \text{pour } q = 2 \text{ et } e = e_2^{(2)}; \\
&\text{à} - \frac{8}{35} t^{-3} \frac{d\Phi^0}{dt}[6a^2 + 5ata' + (ta')^2] \\
&\quad - \frac{12}{35} 4\pi i \int_t^1 \rho\, d(a^2 t^{-2}) \qquad \text{pour } q = 4 \text{ et } e = e_4^{(2)}; \\
&\text{à } 0 \text{ pour tous les autres coefficients et les valeurs } q = 1, 2, 3, \ldots \\
&\qquad \text{correspondantes.}
\end{aligned}$$

La dernière ligne montre que la déformation $e^{(2)}$ ne procède que suivant les polynomes X_0, X_2, X_4, comme nous l'avions prévu par la théorie générale du début de ce Chapitre :

$$e^{(2)} = e_0^{(2)} X_0 + e_2^{(2)} X_2(c\theta) + e_4^{(2)} X_4(c\theta).$$

Les surfaces de niveau sont encore de révolution, mais ce ne sont plus des ellipsoïdes.

En mettant en évidence la correction à faire subir à des ellipsoïdes tangents au pôle et à l'équateur aux surfaces de niveau actuelles, le système (129) se simplifiera considérablement ainsi que l'étude de la seconde approximation. Ce sera l'objet d'un Chapitre spécial.

Les approximations d'ordre 3, 4, ..., quoique pratiquement plus compliquées, ne présenteraient aucune difficulté théorique nouvelle.

CHAPITRE VI.

LES RÉSULTATS CLASSIQUES.

61. **Le système fondamental et sa résolution à l'extérieur de l'astre.** — Afin que ce Chapitre puisse être lu indépendamment des précédents, je rappellerai la signification des notations :

t sera le rayon polaire d'une couche de densité $\rho(t)$;
ω est la vitesse angulaire;
$\omega^2 a$ sera la déformation de cette couche, différence du rayon équatorial et du rayon polaire rapportée à ce dernier; elle se confond avec l'aplatissement au sens ordinaire en première approximation;
$D(t)$ la densité moyenne de la matière intérieure à la couche t;
i le coefficient de l'attraction universelle;
θ le complément de la latitude géocentrique;
Φ^1 la correction à faire subir au potentiel de la pesanteur dû au fait que les couches ne sont pas sphériques.

Enfin, l'indice inférieur 1 affectera ce qui a trait à la surface libre $t = 1$ et l'accent (') indiquera une dérivation par rapport à t.

La déformation différence d'un rayon quelconque et du rayon polaire rapportée à ce dernier s'écrit, comme on sait,

$$e = \omega^2 a \sin^2\theta \tag{130}$$

et le système fondamental se réduit à

$$-\frac{4}{3}\pi i D t^{2-q}(qa + ta') + 4\pi i \int_t^1 \rho\, d(at^{2-q}) \tag{131}$$

$$= \begin{cases} -t^3 + \dfrac{3}{2} t^2 \Phi'^{(1)} & \text{si } q = -1, \\ -\dfrac{3}{2} t^2 + \dfrac{3}{2} t \Phi'^{(1)} + \dfrac{3}{2} \Phi^{(1)} & \text{si } q = 0, \\ -\dfrac{5}{2} & \text{si } q = 2. \end{cases}$$

Les équations relatives aux valeurs $q = 1, 3, 4, 5, \ldots$ exprimaient pré-

cisément que la déformation e devait être de la forme (130), il n'est pas nécessaire de les retenir ici, l'équation (130) les résume. A l'extérieur du corps $t > 1$ la densité est nulle et le système (131) s'intègre facilement. L'équation relative à $q = 2$ s'écrit

$$2a + ta' = \frac{15}{8\pi i}\frac{1}{D},$$

mais la densité moyenne à l'extérieur est égale à la masse totale M divisée par le volume $\frac{4}{3}\pi t^3$ de la sphère de rayon t. On trouve ainsi

$$2a + ta' = 5\lambda t^3 \tag{132}$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{2iM}. \tag{133}$$

L'équation (132) s'intègre immédiatement et donne

$$a = \lambda(t^3 + ut^{-2}), \tag{134}$$

$$ta' = \lambda(3t^3 - 2ut^{-2}), \tag{135}$$

u étant une constante. Ensuite, l'équation relative à $q = -1$ donne

$$\Phi'^{(1)} = ut^{-4},$$

à l'extérieur de l'astre. Or la pesanteur s'écrit sur l'axe polaire

$$g = iMt^{-2} - \omega^2\Phi'^{(1)} = iMt^{-2} - \omega^2 ut^{-4},$$

tandis que la déformation prend la forme

$$e = \omega^2\lambda(t^3 + ut^{-2})\sin^2\theta.$$

Ces deux dernières relations ne sont valables qu'à l'extérieur de l'astre.

62. **L'équation de Clairaut et ses transformées.** — L'équation relative à $q = 2$ du tableau (131) peut s'écrire

$$D(2a + ta') = \frac{15}{8\pi i} + 3\int_t^1 \rho\, da, \tag{137}$$

dérivée par rapport à t, elle donne l'équation de Clairaut, liant les variations de l'aplatissement aux variations de la densité :

$$2D'a + 6\rho a' + tDa'' = 0. \tag{138}$$

Faisons la substitution classique pour une équation de ce genre

$$\tau_1 = t\frac{a'}{a},$$

et posons

$$G = t\frac{D'}{D}.$$

La relation (138) s'écrit alors en η et G sous la forme indiquée par Radau

$$t\eta' = -\eta^2 - (5 + 2G)\eta - 2G. \tag{139}$$

Poincaré a fait une étude approfondie des courbes représentées par cette équation dans ses *Figures d'équilibre* (p. 69-81).

Indiquons encore une relation utile, équivalente à l'équation de Clairaut. Pour simplifier posons $c = \frac{15}{8\pi i}$, et la relation (137) devient

$$D(2a + ta') = c + 3\int_t^1 \rho\, da.$$

Intégrons par partie le second terme du second membre, ce qui donne

$$D(2a + ta') = c + 3\rho_1 a_1 - 3\rho a - 3\int_t^1 a\, d\rho,$$

puis remplaçons ρ par $D + \frac{1}{3}tD'$ et l'équation précédente pourra s'écrire

$$5Da + t(Da)' = c + 3\rho_1 a_1 - 3\int_t^1 a\, d\rho.$$

Dérivons par rapport à t

$$6(Da)' + t(Da)'' = 3a\rho' \qquad \text{ou} \qquad [(Da)'t^6]' = 3a\rho' t^5;$$

puis intégrons de o à t. Il n'y a pas lieu d'introduire une constante car les deux membres sont nuls pour $t = o$ et l'on trouve, en définive,

$$(Da)' = 3t^{-6}\int_0^t at^5\, d\rho. \tag{140}$$

C' est l'équation cherchée.

Remarque. — La fonction G s'écrit encore

$$G = 3\left(\frac{\rho}{D} - 1\right),$$

et l'on a toujours $o \leqq \rho \leqq D$ de sorte que G est compris entre o et -3.

$$o \leqq -G \leqq 3.$$

G tend vers zéro quand on se rapproche du centre car alors D tend vers ρ.

A l'extérieur du corps $\rho = 0$, $G = -3$. Si la masse est homogène $\rho = D = \text{const.}$, à l'intérieur, et $G = 0$. Dans ce dernier cas, la formule (140) montre que a' est nul, puisque $d\rho$ est identiquement nul et D constant. L'aplatissement pour une masse homogène est constant et les couches d'égale pression sont homothétiques.

63. **Discussion des variations de l'aplatissement.** — Je m'exprimerai comme si l'axe polaire était décrit de l'infini au centre du corps, donc, dans le sens des t décroissants. C'est plus commode. Quand je dirai qu'une fonction croît, il faut entendre quelle augmente quand t diminue.

Reprenons alors l'équation de Radau valable partout, à l'extérieur comme à l'intérieur :

$$t\eta' = -\eta(\eta + 5) - 2G(1 + \eta).$$

Les relations $0 \leqq -G \leqq 3$ impliquent les propositions suivantes :

Si $\eta < -5$, alors $\eta' < 0$; η croîtrait ;
Si $-2 < \eta < 0$, alors $\eta' > 0$; η décroîtrait.

En conséquence, si η est sur l'intervalle $i_1 : -\infty < \eta < -0$, η se rapproche de l'intervalle $i_2 : -5 < \eta < -2$ et le point η resterait sur i_2 s'il s'y trouvait déjà ou s'il y parvenait. L'intervalle i_2 est attractif, peut-on dire, sur l'intervalle i_1. Il en résulte que si η était négatif pour une valeur t^+ de t, on aurait

$$\eta < -\alpha \qquad \text{pour } 0 < t \leqq t^+,$$

α étant une constante positive. La signification de η : $\eta = t\frac{a'}{a}$ montre que l'on aurait aussi

$$\frac{a'}{a} < -\alpha\frac{1}{t}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{a}{a^+} > \left(\frac{t^+}{t}\right)^{\alpha};$$

et a augmenterait en valeur absolue au delà de toute limite quand t tend vers zéro. L'aplatissement deviendrait infini au voisinage du centre, ce qui est exclu. On a donc

$$\eta \geqq 0 \qquad \text{pour } 0 < t < +\infty.$$

A l'extérieur de l'astre, les fonctions a et ta' sont données par les formules (134) et (135)

$$a = \lambda(t^3 + ut^{-2}), \qquad ta' = \lambda(3t^3 - 2ut^{-2}).$$

Pour $t = +\infty$, a et ta' sont positives, elles ne peuvent changer de signe

en même temps; leur rapport η n'étant pas négatif, elles devraient cependant changer de signe en même temps; elles ne changent donc pas de signe de $t = 0$ à $t = 1$. Sur la surface libre, on a encore

$$a_1 \geqq 0, \qquad a'_1 \geqq 0.$$

A l'intérieur du corps également a et ta' devraient changer de signe en même temps; mais cela est impossible en vertu de la relation (137)

$$\mathrm{D}(2a + ta') = \frac{15}{8\pi t} + 3\int_t^1 \rho a'\, dt, \tag{141}$$

car, la première fois que a et a' s'annuleraient, le premier membre serait nul et le second positif.

En résumé : on a, quelle que soit la valeur de t,

$$a \geqq 0, \qquad a' \geqq 0.$$

Les couches sont aplaties ou peut-être sphériques (repos) et l'aplatissement ne croît jamais de l'infini au centre de l'astre. C'est un *théorème de Clairaut*. Enfin, les relations $a \geqq 0$ et $d\rho \geqq 0$ donnent, en vertu de la formule (140), le résultat classique $(\mathrm{D}a)' \leqq 0$. *Le produit* $\mathrm{D}a$ *ne décroît jamais de la surface au centre.* On en déduit

$$\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} + \frac{a'}{a} \leqq 0, \qquad t\frac{a'}{a} \leqq -t\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}},$$

ce qui revient à dire que η ne surpasse pas $-\mathrm{G}$. En définitive, on a, pour toute valeur de t,

$$0 \leqq \eta \leqq -\mathrm{G} \leqq 3. \tag{142}$$

A l'extérieur de l'astre, on peut écrire

$$\eta_1 = \frac{3t^5 - 2u}{t^5 + u}, \tag{143}$$

d'où

$$u = \frac{3 - \eta_1}{2 + \eta_1}, \tag{144}$$

et l'on déduit de (142) les inégalités suivantes pour u :

$$0 \leqq u \leqq \frac{3}{2}. \tag{145}$$

La première limite est atteinte si la masse est tout entière au centre, la seconde si le fluide est homogène. Enfin, la formule (141) permet

d'écrire au centre de l'astre

$$a(0) \geq \frac{15}{8\pi t}\,\frac{1}{D(0)}. \tag{146}$$

C'est une limite inférieure de l'aplatissement et cette limite est atteinte pour la masse homogène.

64. **Variation de la pesanteur avec la latitude et avec l'altitude.** — Soient comme précédemment g_P la pesanteur au pôle de la surface t et g la pesanteur en un point quelconque M de la même surface de niveau. Si dn représente l'élément de normale en M à la surface t arrêté à la surface $t + dt$, on a

$$g = g_P \frac{dt}{dn} \qquad \text{et} \qquad \frac{dn}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} = 1 + e + t\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Un calcul simple donne ensuite, pour une surface t quelconque et à la latitude $\frac{\pi}{2} - \theta$,

$$g = g_P(1 - \beta \sin^2\theta) \tag{147}$$

avec

$$\beta = \omega^2(a + ta'). \tag{148}$$

A l'extérieur de l'astre, les formules (134) et (135) permettent d'écrire

$$\beta = \omega^2\lambda(4t^3 - ut^{-2}). \tag{149}$$

Enfin, calculons la déviation de la verticale le long d'une normale à une surface d'égale densité. Cette déviation $d\psi$ est, pour un déplacement dt, donnée comme suit, la figure (2), page 53 permet de l'apercevoir :

$$d\psi = \frac{1}{t}\frac{\partial\, dn}{\partial\theta} = \frac{dt}{t}\frac{\partial \frac{dn}{dt}}{\partial\theta} = \frac{dt}{t}\frac{\partial \frac{g_P}{g}}{\partial\theta}. \tag{150}$$

et l'on trouve, tout calcul fait :

$$d\psi = \frac{dt}{t}\beta \sin 2\theta. \tag{151}$$

Les formules (147) et (151) sont encore de Clairaut.

65. **La différence des moments d'inertie.** — Soient S_1 la surface libre du corps puis A et C les moments d'inertie par rapport à un diamètre équatorial Ox et par rapport à l'axe polaire Oz. Une formule (45) du paragraphe 26 donne, en négligeant le dernier terme qui est d'ordre

quatre,

$$C - A = \frac{1}{4\pi i}\int g(x^2 - z^2)\, dS_1.$$

Le calcul du second membre à partir des expressions (147) et (149) s'effectue sans grande difficulté et donne

$$C - A = \frac{\omega^2}{3i}u. \tag{152}$$

La constante u est donc proportionnelle à la différence des moments d'inertie.

Il est clair que l'on peut calculer directement ces moments eux-mêmes

$$C = \int \rho(x^2 + y^2)\, dV, \qquad A = \int \rho(y^2 + z^2)\, dV,$$

la répartition des densités étant supposée connue, on trouve :

$$\left.\begin{matrix} C \\ A \end{matrix}\right\} = \frac{8\pi}{3}\int_0^1 \rho\, t^4\, dt + \left.\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}\right\} \times \frac{8\pi}{15}\omega^2 \int_0^1 \rho\, d(at^5), \tag{153}$$

4 convient à C et 3 à A. Ces expressions, valables en première approximation, ont déjà été données par Clairaut. La différence donne

$$C - A = \frac{8\pi}{15}\omega^2 \int_0^1 \rho\, d(at^5). \tag{154}$$

Elle est de l'ordre de ω^2 bien entendu et, comme C — A ne dépend, on le sait (§ 26), que de la surface libre S_1, de ω, et de la masse totale M, l'intégrale précédente ne dépend, elle aussi, que de ces éléments. On peut écrire

$$\int_0^1 \rho\, d(at^5) = F|\, S_1,\ \omega,\ M\,|.$$

C'est un invariant intégral pour toutes les répartitions des densités qui laissent inaltérés les éléments stokiens : S_1, ω, M.

66. **L'artifice de Radau.** — Dans les expressions de la déformation et des variations de la pesanteur, la constante u est toujours multipliée par ω^2. Il suffira de connaître u à ω^2 près pour connaître e et g à ω^4 près, donc en première approximation.

Rappelons la relation

$$u = 3i\frac{C - A}{\omega^2}.$$

et posons

$$C - A = C\mathcal{J},$$

$\mathcal{J}$ est une valeur qui sera fournie, entre autres, par les mesures précessionnelles. La constante $\mathcal{J}$ est comme $C - A$ de l'ordre de ω^2. Nous poserons en conséquence $\mathcal{J} = \omega^2 \mathcal{J}'$. La constante u s'écrit alors

$$u = 3i\mathcal{J}'C. \tag{155}$$

Il suffira d'avoir C à ω^2 près pour connaître u à ω^2 près, et c'est ce que l'on cherche. Mais la formule (153) se réduit, dans ces circonstances, à

$$C = \frac{8\pi}{3}\int_0^1 \rho t^4\, dt. \tag{156}$$

Cette constante C n'est pas stokienne et dépend de la manière dont les densités se répartissent à l'intérieur de l'astre. Mais Radau, par un artifice fort habile, a montré que l'intégrale

$$\int_0^1 \rho t^4\, dt \tag{157}$$

est cependant quasi stokienne; c'est-à-dire qu'elle peut être calculée avec une faible erreur, sans faire intervenir la répartition des densités à l'intérieur de la Terre. En effet, remplaçons ρ par sa valeur en D

$$\rho = D + \frac{1}{3} t D',$$

et intégrons le second terme par partie, on trouve

$$\int_0^1 \rho t^4\, dt = \frac{1}{3} D_1 - \frac{2}{3}\int_0^1 D t^4\, dt. \tag{158}$$

Or, l'équation de Clairaut-Radau (139) s'écrit, on le vérifie directement,

$$(D t^5 \sqrt{1+\eta})' = 5 D t^4 \psi(\eta) \qquad \text{avec } \psi(\eta) = \frac{1 + \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{10}}{\sqrt{1+\eta}}. \tag{159}$$

En intégrant les deux membres de (159) entre $t = 0$ et $t = 1$ puis en appliquant au second la formule de la moyenne, on trouve

$$D_1 \sqrt{1+\eta_1} = 5\psi(\eta^+)\int_0^1 D t^4\, dt, \tag{160}$$

η^+ étant une valeur convenable de η qui correspond à une valeur t^+

comprise entre zéro et un. Les formules (158) et (160) donnent ensuite

$$\int_0^1 \rho t^4\, dt = \frac{1}{3} D_1 \left(1 - \frac{2}{5} \frac{1}{\psi(\eta^+)} \sqrt{1+\eta_1}\right).$$

La valeur η_1 est liée à la constante u par la relation (143)

$$\eta_1 = \frac{3-2u}{1+u}. \tag{161}$$

La fonction $\psi(\eta)$ varie très peu lorsque η varie de zéro aux valeurs η_1 qui répondent aux figures planétaires peu aplaties. En passant de η_1 à u on trouve donc

$$\int_0^1 \rho t^4\, dt = \frac{1}{3} D_1 \left(1 - \frac{2}{5} \frac{1}{\psi} \sqrt{\frac{4-u}{1+u}}\right), \tag{162}$$

et les expresssions (155), (156), (162) donnent, en définitive :

$$\frac{8\pi i}{3} \mathcal{J}' D_1 = f(u) \qquad \text{avec } f(u) = \frac{u}{1 - \frac{2}{5} \frac{1}{\psi} \sqrt{\frac{4-u}{1+u}}}. \tag{163}$$

Pour la Terre, la quantité ψ sera égale à l'unité à moins d'un millième près. La formule (162) montre bien que l'intégrale (157) est, à peu de chose près, stokienne, puisqu'elle ne dépend que des éléments D_1, u et ψ.

67. **Loi de Lipschitz et hypothèse d'un noyau central.** — Soient ρ_0 la densité au centre, puis α et n deux nombres positifs, et posons

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha t^n).$$

C'est la loi de Lipschitz de variation des densités, à trois paramètres ρ_0, α, n. Dans le cas particulier $n = 2$, elle se réduit à la loi de Roche. La densité moyenne s'écrit

$$D = \rho_0 \left(1 - \frac{3}{3+n} \alpha t^n\right)$$

et l'équation de Clairaut (138) s'intègre dans ce cas par la série hypergéométrique, comme Tisserand l'a démontré.

Envisageons maintenant une distribution des densités correspondant à un noyau central homogène entouré d'une écorce homogène et de densité moindre. L'aplatissement se calculera facilement, à partir de la formule (140)

$$(D\alpha)' = 3t^{-6} \int_0^t \alpha t^5\, d\rho. \tag{164}$$

Soit, en effet, t_+ la valeur de t pour laquelle la densité subit le saut, $\rho_0 \to \rho_1$, ρ_0 étant la densité du noyau et ρ_1 la densité de l'écorce. Il est clair que l'on peut supposer ici une sorte de « polissage des fonctions » comme celui qu'on envisage dans le calcul des variations, et dire que seules les valeurs voisines de t_+ fournissent un $d\rho$ différent de zéro. On a donc : de o à t_+

$$(Da)' = 0, \qquad Da = \rho_0 a_0;$$

et de t_+ à 1,

$$(Da)' = 3t^{-6} a_0 t_+^5 (\rho_1 - \rho_0).$$

De cette dernière relation, on déduit, en posant $\theta = t.t_+^{-1}$,

$$Da = \rho_0 a_0 + \frac{3}{5} a_0 (\rho_0 - \rho_1)(\theta^{-5} - 1).$$

On a d'autre part

$$D = \rho_1 + (\rho_0 - \rho_1)\theta^{-3}, \tag{165}$$

d'où

$$a = a_0 \qquad \text{pour } o \leqq t \leqq t_+,$$

et

$$a = \frac{1}{5} a_0 \frac{2\rho_0 + 3\rho_1 + 3(\rho_0 - \rho_1)\theta^{-5}}{\rho_1 + (\rho_0 - \rho_1)\theta^{-3}} \qquad \text{pour } t_1 \leqq t \leqq 1. \tag{166}$$

Enfin, il nous sera utile de former ta' qui s'écrit

$$ta' = \frac{3}{5} a_0 (\rho_0 - \rho_1) \frac{2\rho_0 + 3\rho_1 - 5\rho_1\theta^{-2} - 2(\rho_0 - \rho_1)\theta^{-5}}{\rho_1^2\theta^3 + 2\rho_1(\rho_0 - \rho_1) + (\rho_0 - \rho_1)^2\theta^{-3}}. \tag{167}$$

Si la densité subissait deux sauts brusques ou n sauts brusques séparant des régions d'homogénéité, la formule (164) permettrait d'obtenir par des expressions semblables à (166) les valeurs de l'aplatissement des différentes couches. On retrouverait ainsi les résultats de la thèse de Hamy qui envisageait le cas d'une superposition d'un nombre fini d'ellipsoïdes homogènes.

68. **Sur la dérivée de l'aplatissement.** — Nous aurons besoin, dans la suite, de quelques renseignements sur la manière dont varie la fonction $u_n = a^l t^n$.

Montrons tout d'abord que u_4 croît toujours avec t. En effet, on a

$$u_4 = a_4' t^4 = a\eta_1 t^3, \qquad tu_4' = at^2(t\eta_1' + 3\eta_1 + \eta_1^2) = 2at^2(-\eta_1 - G - G\eta_1)$$

et cette dernière expression n'est jamais négative, puisque l'on a

$$o \leqq \eta_1 \leqq -G.$$

Montrons en plus que pour la Terre et les lois des densités admises

au paragraphe précédent, la fonction $u_1 = ta' = a\eta$ est toujours croissante du centre à la surface.

En effet :

$$t(a\eta_1)' = a\eta_1(t\eta_1' + \eta_1^2);$$

posons, alors,

$$H = t\eta_1' + \eta_1^2, \tag{168}$$

d'où

$$H = -(5 + 2G)\eta_1 - 2G, \tag{168'}$$

en vertu de l'équation de Radau (139). Pour $t = 0$, H est nul, pour que H devienne négatif, il faudrait avoir à la fois $H = 0$ et $H' \leqq 0$. Cela impliquerait, on le vérifie aisément, à partir des deux expressions (168) et (169) de H que l'on eût

$$-G' \leqq -\frac{2}{5}\frac{G^2}{t}. \tag{170}$$

Il faudrait que la fonction $-G$, ou encore $1 - \frac{\rho}{D}$, fût décroissante et avec une certaine rapidité du centre vers la surface sur un certain intervalle.

La relation (170) ne peut être satisfaite par une loi des densités telle que celle de Lipschitz. Cette dernière donnerait, en effet, au lieu de (170)

$$-1 \geqq \frac{6}{5}\frac{\alpha}{n+3}t^n,$$

qui est une absurdité, puisque α et n sont tous les deux positifs.

La loi de Lipschitz implique donc l'inégalité $(ta')' > 0$.

Démontrons maintenant la proposition suivante : dans l'hypothèse d'un noyau central et d'une écorce homogène, la fonction ta' est également toujours croissante si densité moyenne et densité superficielle ont des valeurs voisines de leur valeur pour la Terre.

En effet, pour que ta' fût décroissante il faudrait que le dénominateur de la formule (167) fût croissant avec θ. Pour cela, il faudrait avoir

$$\theta^3 > \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1}. \tag{171}$$

Mais la masse totale peut s'exprimer de deux manières :

$$M = \frac{4\pi}{3}[(\rho_0 - \rho_1)t_+^3 + \rho_1] = \frac{4\pi}{3}\rho_m,$$

où ρ_m désigne la densité moyenne, d'où

$$t_+^3 = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_m - \rho_1}. \tag{172}$$

Or t_+^{-3} est la plus grande valeur que θ^3 puisse atteindre à l'intérieur de la masse. On devrait donc avoir par (171) et (172)

$$\rho_m - \rho_1 < \rho_1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \rho_1 > \frac{1}{2}\rho_m;$$

mais pour la Terre, cette relation est impossible, car $\rho_m > 5,5$ et une densité moyenne superficielle $\rho_1 > 2,75$ est sans doute trop forte.

Une étude plus approfondie de l'équation de Radau montre que le cas que nous venons d'envisager serait le plus favorable pour avoir $(ta')' < 0$. Mais, comme nous venons de le voir, cela ne se produit pas.

CHAPITRE VII.

LA SECONDE APPROXIMATION.

69. **Résolution à l'extérieur de l'astre.** — Il me sera sans doute permis de ne pas reproduire le tableau (129), p. 92, qui régit la seconde approximation. Les calculs que la résolution de ce système comporte ne seront pas retranscrits non plus. A l'extérieur de l'astre, les intégrales en ρ disparaissent et les déformations $e_0^{(2)}$, $e_2^{(2)}$, $e_4^{(2)}$ peuvent être calculées ainsi que la fonction Φ^2. La relation

$$e_0^{(2)} + e_2^{(2)} + e_4^{(2)} \equiv 0$$

peut ensuite servir de vérification du calcul fait.

La déformation est après la seconde approximation, comme nous l'avons déjà montré (§ 60),

$$e = \omega^2 a s^2\theta + \omega^4 (e_0^{(2)} X_0 + e_2^{(2)} X_2 + e_4^{(2)} X_4),$$

le premier terme correspond à la théorie de Clairaut. Le passage des polynomes de Legendre aux fonctions trigonométriques donne, tout calcul fait,

$$e = m(t)\, s^2\theta - n(t)\, s^2\theta\, c^2\theta \tag{173}$$

avec, pour l'extérieur de l'astre, c'est-à-dire pour $t \geqq 1$

$$m(t) = \lambda\omega^2 (t^3 + ut^{-2}) + \lambda^2\omega^4 (3t^6 + 3ut - rt^{-4}),$$
$$n(t) = \lambda^2\omega^4 (3t^6 + ut - 7rt^{-4}).$$

r et v sont deux constantes stokiennes, liées entre elles par la relation

$$r + v = \frac{2}{7} u^2.$$

La pesanteur sur l'axe polaire s'exprime encore comme ceci :

$$g(t) = i\mathrm{M} (t^{-2} - 2\lambda\omega^2 ut^{-4} + 8\lambda^2\omega^4 rt^{-6})$$

et les variations de la pesanteur avec le complément θ de la latitude géo-

centrique sont données comme suit :

$$\frac{g(t,\theta)}{g(t)} = 1 - X(t)\,s^2\theta + Y(t)\,s^2\theta\,c^2\theta,$$

avec

$$X(t) = \lambda\omega^2(4t^3 - ut^{-2}) + \lambda^2\omega^4\left(5t^6 + 14ut - 3vt^{-4} - \frac{1}{7}u^2t^{-4}\right),$$

$$Y(t) = \lambda^2\omega^4(7t^6 + 14ut + 21vt^{-4} + u^2t^{-4}).$$

Supposons données les deux constantes ω et M ainsi que la déformation de la surface libre

$$e(1) = m(1)\,s^2\theta - n(1)\,s^2\theta\,c^2\theta,$$

qui fournit S_1 en seconde approximation; dès ce moment, les surfaces de niveau à l'extérieur de l'astre et le champ de la pesanteur sont entièrement déterminés en vertu du théorème de Stokes. Il n'y a donc que deux constantes, par exemple $m(1)$ et $n(1)$ qui puissent intervenir dans les expressions de $e(t, \theta)$, $g(t)$ et de $g(t, \theta)$ à l'extérieur de l'astre. Les constantes introduites ici u et r remplacent avantageusement les deux précédentes. Quant aux constantes λ et ν, elles ne sont pas indépendantes des précédentes.

Après la seconde approximation, la pesanteur et les surfaces de niveau ne dépendent à l'extérieur de l'astre que de deux constantes u et r, les éléments ω et M étant supposés donnés.

70. **Passage à la latitude géographique.** — L'angle θ représentait le complément de la latitude géocentrique. Soient θ' la latitude géographique et ν l'angle de la normale à la surface de niveau dirigée vers l'extérieur avec le rayon vecteur prolongé. Ces trois angles sont liés par $\frac{\pi}{2} - \theta = \theta' - \nu$ et la formule (100), p. 76, peut s'écrire maintenant

$$\frac{1}{c^2\nu} = 1 + \left(\frac{\partial e(t,\theta)}{\partial\theta}\right)^2. \tag{174}$$

Les fonctions $c^2\theta$ et $s^2\theta$ qui interviennent dans e et g étant toujours multipliées par ω^2, on peut, pour l'estimation de l'angle ν, négliger les termes en ω^4 dans le développement de e. On trouve

$$\nu = 2\omega^2 a\,s\theta\,c\theta, \qquad \begin{aligned} c^2\theta &= s^2\theta'(1 - 4\omega^2 a\,c^2\theta'), \\ s^2\theta &= c^2\theta'(1 + 4\omega^2 a\,s^2\theta'). \end{aligned}$$

La variation de g avec θ étant donnée par la formule

$$\frac{g(t,\theta)}{g_{\text{pôle}}} = 1 - X\,s^2\theta + Y\,s^2\theta\,c^2\theta,$$

le passage de θ à θ' fournit la nouvelle relation

$$\frac{g(t,\,\theta)}{g_{\text{pôle}}} = 1 - X\,c^2\theta' + (Y - 4\,\omega^2 a X)\,s^2\theta'\,c^2\theta'.$$

Enfin, en comparant la pesanteur g à la latitude θ' avec sa valeur sur l'équateur g_{eq}, on obtient

$$\frac{g}{g_{eq}} = 1 + x\,s^2\theta' - y\,s^2\theta'\,c^2\theta'.$$

Les coefficients x et y sont pour $t \geq 1$

$$x = \lambda\ \omega^2(4t^3 - ut^{-2}) + 3\lambda^2\omega^4(7t^6 + 2ut + rt^{-4}),$$
$$y = \lambda^2\omega^4(9t^6 - 2ut + 5u^2t^{-4} - 21\,vt^{-4}).$$

L'importance des termes de l'ordre de ω^4 n'est nullement négligeable dans le cas de la Terre, comme nous le verrons au Chapitre suivant.

71. **Ellipsoïde et correction.** — Reprenons l'expression de la déformation de la couche t à la latitude géocentrique θ

(175) $$e = m(t)\,s^2\theta - n(t)\,s^2\theta\,c^2\theta.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ cette formule donne la déformation équatoriale $e_{\frac{\pi}{2}} = m(t)$ et l'équation (175) peut s'écrire

$$e = e_{\frac{\pi}{2}}\,s^2\theta - n(t)\,s^2\theta\,c^2\theta.$$

Soit, alors $s(t)$ un ellipsoïde de révolution ayant mêmes pôles et même équateur que la surface de niveau $S(t)$. Sa déformation est

$$e_s = e_{\frac{\pi}{2}}\,s^2\theta - \frac{3}{2}\,e^2_{\frac{\pi}{2}}\,s^2\theta\,c^2\theta.$$

On le vérifie aisément, car on peut négliger les termes en $e^3_{\frac{\pi}{2}}$ qui sont de l'ordre de ω^6. La différence des deux déformations de la surface de niveau S et de l'ellipsoïde s s'écrit

(176) $$e_S - e_s = -\omega^4\,E(t)\,s^2\theta\,c^2\theta.$$

Elle est nulle au pôle $\theta = 0$ et à l'équateur $\theta = \frac{\pi}{2}$, maximum pour $\theta = \frac{\pi}{4}$. Multipliée par t, cette différence fournit l'excès du rayon vecteur de S sur celui de s dans une même direction θ.

Un calcul simple permet d'écrire

$$E(t) = \frac{35}{8} e_4^{(2)}(t) - \frac{3}{2} a^2(t),$$

et l'équation du tableau (129), p. 92, relative à $q = 4$, se simplifie beaucoup si l'on prend $E(t)$ pour fonction inconnue. Elle devient

$$4E + tE' = \frac{3t^2}{D} \int_t^1 \rho \, d(Et^{-2}) + ta'(2a + ta'). \tag{177}$$

Cette équation en E fera l'objet d'une étude spéciale dans les deux paragraphes suivants. Elle joue pour la seconde approximation le même rôle que l'équation (137) pour la première et régit les variations en t de la correction à faire subir à l'ellipsoïde de comparaison pour retrouver la surface réelle.

On trouvera pour tout astre,

$$E(1) \geqq 0, \qquad 3E(1) + E'(1) \geqq 0, \tag{178}$$

et pour la Terre,

$$E(1) \geqq 0, \qquad E'(1) \geqq 0. \tag{179}$$

Ces dernières relations se traduisent ainsi, si l'on se réfère à l'équation (176) de la correction :

a. La surface libre des océans est un ellipsoïde déprimé entre le pôle et l'équateur. Callandreau (1) l'a déja démontré par une méthode toute différente.

b. Cette dépression diminue quand on passe de la surface libre aux surfaces d'égale densité voisines.

L'intégration de l'équation en E s'effectue facilement à l'extérieur de l'astre où les fonctions a et ta' sont données par les formules (134) et (135) et l'on trouve, ρ étant nul

$$\frac{2E}{\lambda^2} = 3t^6 - 4ut - 3u^2 t^{-4} - 14vt^{-4}.$$

Les relations (178) et (179) impliquent, alors, les conséquences suivantes.

Pour toute planète, la constante v est liée à u par les inégalités

$$3 - 4u - 3u^2 \geqq 14v \geqq -27 + 16u - 3u^2. \tag{180}$$

---

(1) Mémoire sur la théorie de la figure des planètes (*Ann. de l'Obs. de Paris*, 1889.)

Pour la Terre, les inégalités plus resserrées suivantes ont lieu

$$3 - 4u - 3u^2 \geqq 14\nu \geqq -\frac{9}{2} + u - 3u^2. \tag{181}$$

Enfin, si la masse est homogène, a' est identiquement nulle et l'équation en E se réduit à l'équation $\{e\} = 0$ du paragraphe 57, pour $q = 4$; elle n'a pas d'autre solution que $E = 0$, c'est-à-dire que les figures sont des ellipsoïdes. En effet, ce sont les *ellipsoïdes* de *Maclaurin*.

Remarque. — La limitation de ν par les relations (180) ou (181) est très suffisante, car cette constante n'intervient jamais que dans les termes d'ordre ω^4.

72. **La correction dans le cas de la Terre.** — Il nous reste à établir les inégalités (178) et (179). Commençons par le cas de la Terre. L'équation en E s'écrit

$$4E + tE' = \frac{3t^2}{D}\int_t^1 \rho\, t^{-3}(-2E + tE')\, dt + F. \tag{182}$$

La fonction F n'est jamais négative, en plus, elle n'est jamais croissante de la surface libre au centre, car $F = ta'(2a + ta')$ et ses propriétés ont été reconnues aux fonctions a et ta' par l'étude entreprise au paragraphe 63.

Encore ici il est plus bref de s'exprimer comme si la variable t était toujours supposée décroissante. C'est ce que nous ferons.

1. Je dis que l'on a $E(1) \geqq 0$. En effet, dans le cas contraire, $E_1 < 0$, on aurait pour $t = 1$

$$4E_1 + E'_1 = F_1,$$

l'intégrale étant nulle, d'où

$$E'_1 = F_1 - 4E_1,$$

E'_1 serait positif. Tant que E' reste positif, E diminue et le second membre de (182) reste positif; la fonction $t\dfrac{E'}{E}$ reste négative et bien déterminée. Écrivons

$$E\left(4 + t\frac{E'}{E}\right) = \frac{3t^2}{D}\int_t^1 \rho\, t^{-3} E\left(-2 + t\frac{E'}{E}\right) dt + F.$$

La fonction E restant négative et le second membre positif, la fonction

$$4 + t\frac{E'}{E}$$

reste négative; alors, E′ ne peut plus s'annuler. On aurait donc

$$4 + t\frac{E'}{E} < 0 \qquad \text{de } t = 1 \text{ à } t = 0.$$

Mais c'est impossible, cela entraîne

$$\frac{-E'}{-E} < -\frac{4}{t}, \qquad -E > -E_1 t^{-4},$$

et $-E$ augmenterait au delà de toute limite au voisinage du centre, ce qui est exclu *a priori*, § 54, p. 85.

II. Je dis que l'on a $E'(1) \geqq 0$. En effet, dans le cas contraire, $E'(1) < 0$, on aurait pour $t = 1$

$$4E_1 + E'_1 = F_1, \qquad \text{d'où} \qquad 4E_1 > F_1,$$

E_1 serait positif, E croîtrait tant que E′ reste négatif, l'intégrale de l'équation en E resterait négative. Alors, E′ ne pourrait plus s'annuler, car si $E' = 0$ pour t_+ on aurait

$$4E_+ < F_+ \leqq F_1 < 4E_1,$$

ce qui est contradictoire, puisqu'il faudrait avoir, au contraire, $E_+ > E_1$. En résumé : la dérivée E′ ne saurait s'annuler de $t = 1$ à $t = 0$. **Je prétends qu'il y a là encore une absurdité.** En effet, représentons par H le terme contenant l'intégrale de l'équation (182) en E. Cette dernière s'écrit

$$E' + \frac{4}{t}E = \frac{F}{t} + \frac{H}{t},$$

et la fonction H serait négative de $t = 1$ à $t = 0$. Mais on peut intégrer cette équation comme si le second membre était connu et l'on vérifie le droit d'écrire

$$E = t^{-4}\int_0^t F t^3\, dt + t^{-4}\int_0^t H t^3\, dt.$$

La fonction H étant négative de $t = 1$ à $t = 0$, on aurait

$$E < t^{-4}\int_0^t F t^3\, dt.$$

La formule de la moyenne s'applique et donne, t_+ étant une valeur comprise entre 0 et t,

$$E < F_+ t^{-4}\int_0^t t^3\, dt \leqq \frac{F}{4}.$$

Mais F tend vers zéro avec t, E lui aussi tendrait vers zéro, au lieu d'augmenter constamment à partir de la valeur positive E_1 comme il l'eût fallu.

73. **La correction pour un astre quelconque.** — La démonstration donnée au début du paragraphe précédent pour établir l'inégalité $E(1) \geq 1$ est valable pour tout astre; en effet, elle ne fait intervenir que le caractère positif de la fonction F. Mais la seconde démonstration prouvant $E'(1) \geq 0$ supposait la fonction F non croissante; valable pour la Terre, elle ne le serait plus nécessairement pour une figure quelconque.

Afin d'entreprendre une étude approfondie de ce cas général, nous introduirons un paramètre α tel que l'on ait $0 < \alpha < 4$ et la fonction qui en dépend

$$A(t) = \alpha E + tE'.$$

Cette fonction ne peut rester négative de $t = 1$ à $t = 0$. On aurait en effet $E_1 > 0$, comme précédemment, et en plus

$$\frac{E'}{E} < -\frac{\alpha}{t}, \qquad E > E_1 t^{-\alpha};$$

E augmenterait au delà de toute limite au voisinage du centre, ce qui est exclu.

Alors, si l'on avait $A(1) < 0$, on devrait avoir $A = 0$ pour une valeur t_+ comprise entre 1 et 0. Supposons que t_+ soit « la plus grande valeur » de t sur cet intervalle qui annule A. On s'assure que cette plus grande valeur existerait bien. L'équation E s'écrit, en remplaçant tE' par $A - \alpha E$,

$$(4-\alpha)E + A + \frac{3t^2}{D}\int_t^1 \rho t^{-3}[(2+\alpha)E - A]\,dt = F.$$

Pour $t = 1$, puisque A_1 est supposé négatif, on aurait

$$(4-\alpha)E_1 > F_1. \tag{183}$$

Puis, sur l'intervalle $1 \geq t > t_+$ où A est encore négatif, $E > E_1 t^{-\alpha}$ et par suite

$$(4-\alpha)E_1 t_+^{-\alpha} + 3(2+\alpha)E_1 \frac{t_+^2}{D_+}\int_{t_+}^1 \rho t^{-3-\alpha}\,dt < F_+.$$

En multipliant par t_+^α et tenant compte de l'inégalité (183), on aurait encore

$$1 + 3\frac{2+\alpha}{4-\alpha}\frac{t_+^{2+\alpha}}{D_+}\int_{t_+}^1 \rho t^{-3-\alpha}\,dt < \frac{F_+}{F_1}t_+^\alpha. \tag{184}$$

Voilà à quelle conséquence conduirait l'hypothèse

$$\alpha E_1 + E_1' < 0. \tag{185}$$

On démontrerait maintenant, sans difficulté, que la fonction Ft^3 ne croît jamais de la surface libre au centre de l'astre. Pour cela, nous écrirons $F = a^2\eta(2+\eta)$ puis dériverons, enfin, pour prouver $(Ft^3)' \leqq 0$, nous remplacerions $t\eta'$ par sa valeur $-\eta^2 - (5+2G)\eta - 2G$ et enfin, nous invoquerions la relation $\eta \leqq -G$.

L'inégalité (185) est donc impossible pour $\alpha = 3$. Le premier membre serait supérieur à l'unité et le second inférieur ou égal à l'unité. En définitive, la relation suivante est toujours vraie

$$3E_1 + E_1' \geqq 0, \tag{186}$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — 1° La relation (186) jointe à l'équation $E_1 \geqq 0$ et à $4E_1 + E_1' = F_1$ donne les deux limites suivantes de E_1 valables pour un astre quelconque

$$0 \leqq E_1 \leqq F_1.$$

2° Pour avoir $E_1' < 0$, il faudrait que la relation (184) fût satisfaite pour une valeur t_+ au moins, α étant un nombre positif et inférieur à quatre. Cela paraît peu vraisemblable. Cette remarque me conduit à affirmer sans démonstration les propositions suivantes, dont je ne fais, bien entendu, aucun usage dans ce livre :

a. Pour un astre quelconque, on a $E \geqq 0$ de $t = 1$ à $t = 0$;

b. On a également $E' \geqq 0$ de $t = 1$ à $t = 0$;

c. E tend vers zéro avec t.

3° L'équation en E revêt une forme d'apparence plus simple après le changement de fonction inconnue $e = Et^{-2}$; elle devient

$$(et^6)' = \frac{3t^5}{D}\int_t^1 \rho\, de + Ft^3.$$

4° Une étude de l'équation en E aussi approfondie que celle que Poincaré a consacrée à l'équation de Radau, présenterait de grandes difficultés.

74. La différence des moments d'inertie. — La formule (45) du paragraphe 26 où S est la surface libre et V'' le volume compris entre S et une sphère de même pôle, s'écrit encore

$$C - A = \frac{1}{4\pi i}\int g(x^2 - z^2)\, dS + \frac{\omega^2}{2\pi i}\int (x^2 - z^2)\, dV''.$$

V'' est de l'ordre de ω^2, le dernier terme est donc de l'ordre ω^4. Il faut en tenir compte actuellement. Le calcul du second membre à ω^6 près, à partir des expressions de g et de e transcrites au paragraphe 69, donne la même relation qu'au Chapitre précédent

$$u = 3i\frac{C - A}{\omega^2}.$$

Introduisons de nouveau la constante $\mathcal{J}$ fournie par l'observation

$$C - A = C\mathcal{J}.$$

Comme précédemment, elle est de l'ordre de ω^2 et nous poserons

$$\mathcal{J} = \omega^2\mathcal{J}'.$$

La constante u s'exprime de nouveau au moyen de C et de $\mathcal{J}$

$$u = 3i\,C\mathcal{J}',$$

mais cette fois, nous voulons avoir u à ω^4 près pour avoir e et g à ω^6 près. Dans le calcul de C par (153), il faut tenir compte du terme en ω^2. Écrivons, en vertu de (153) et de (154)

$$C = R + 4(C - A) = R + 4\omega^2\mathcal{J}'C$$

avec

$$R = \frac{8\pi}{3}\int_0^1 \rho t^4\,dt,$$

d'où

$$C(1 - 4\omega^2\mathcal{J}') = R \qquad \text{et} \qquad C = (1 + 4\omega^2\mathcal{J}')R,$$

expression de C à ω^4 près. Ensuite, u devient

$$u = 3i\mathcal{J}'(1 + 4\omega^2\mathcal{J}')R.$$

Cette formule ne diffère de celle du paragraphe 66 que par la présence du terme $4\omega^2\mathcal{J}'$. Nous calculerons de nouveau l'intégrale R en ρ par le procédé de Radau, ce qui donne, en fin de compte,

$$\frac{8\pi i}{3}\mathcal{J}'(1 + 4\omega^2\mathcal{J}')D_1 = f(u)$$

$$f(u) = \frac{u}{1 - \frac{2}{5}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4-u}{1+u}}}.$$

Remarque. — Il faut prendre garde, si l'on désire revenir de la densité moyenne D_1 à la masse totale, que D_1 n'est pas la densité moyenne de l'astre lui-même, mais des sphères concentriques, chargées de la densité $\rho(t)$. Cette distinction n'avait pas lieu d'être faite en pre-

mière approximation, tant qu'on cherchait une relation entre $\mathcal{J}$ et u à ω^2 près, mais actuellement, il faut la faire, me semble-t-il. Soit alors, Ms la masse totale des sphères. On a $Ms = \frac{4}{3}\pi D_1$ d'où

$$f(u) = 2i\mathcal{J}'(1 + 4\omega^2\mathcal{J}')M\frac{M_s}{M}, \tag{187}$$

M étant la masse totale de l'astre. Cette dernière, nous pouvons facilement la calculer, et l'on trouve à ω^4 près

$$M = M_s + \frac{8\pi}{3}\omega^2\int_0^1 \rho\, d(at^3).$$

Au même ordre, on a

$$\frac{M_s}{M} = 1 - \omega^2 P \qquad \text{avec } P = \frac{2}{3}\frac{\int_0^1 \rho t^2(3a + ta')\,dt}{\int_0^1 \rho t^2\,dt}.$$

Appliquons la formule de la moyenne à l'intégrale numérateur

$$\int_0^1 \rho t^2(3a + ta')\,dt = (3a + ta')_+\int_0^1 \rho t^2\,dt,$$

la parenthèse est à prendre pour t_+ telle que $0 \leqq t_+ \leqq 1$ et la fonction P devient

$$P = \left(2a + \frac{2}{3}ta'\right)_+.$$

Les relations (146) et $(ta')' > 0$ de la fin du Chapitre précédent donnent

$$0 < \frac{15}{8\pi i}\frac{1}{\rho(0)} \leqq 2a(0) \leqq P \leqq 2a_1 + \frac{2}{3}a'_1 \leqq 2a_1 + a'_1.$$

Cette dernière limite vaut 5λ. En prenant les valeurs extrêmes, P est donc limité par $0 \leqq P \leqq 5\lambda$. Enfin, la relation (187) s'écrit

$$f(u) = \frac{\mathcal{J}'}{\lambda}(1 + 4\omega^2\mathcal{J}' - \omega^2 P),$$

d'où, en tenant compte des inégalités précédentes,

$$\frac{\mathcal{J}'}{\lambda}(1 + 4\omega^2\mathcal{J}') \geqq f(u) \geqq \frac{\mathcal{J}'}{\lambda}(1 + 4\omega^2\mathcal{J}' - 5\omega^2\lambda). \tag{188}$$

Cette formule sera très utile dans la question de l'accord entre les mesures géodésiques et précessionnelles.

CHAPITRE VIII.

GÉODÉSIE ET PRÉCESSION.

75. **Rappel des résultats obtenus par le procédé uniforme.** — Afin de dispenser le lecteur qui s'intéresse plus spécialement à la forme théorique de la Terre et aux variations du champ de la pesanteur, de lire les pages ardues des Chapitres précédents, résumons ici les résultats obtenus pouvant paraître utiles pour la géodésie.

Je me restreindrai à ce que le procédé uniforme nous a donné et laisserai de côté la formule de Bruns qui fit l'objet d'un Chapitre spécial.

Voici tout d'abord les notations employées :

ω est la vitesse angulaire supposée constante;
i le coefficient de l'attraction universelle;
M la masse totale de l'astre;
t_1 le rayon polaire de la surface libre;
t le rayon polaire d'une surface équipotentielle pour le champ de la pesanteur;
θ le complément de la latitude géocentrique;
θ' la latitude géographique;
$g(t)$ la pesanteur sur l'axe polaire;
$g(t, \theta)$ la pesanteur sur la surface de niveau de rayon t à la latitude $\pi - \theta$;
$e(t, \theta)$ la déformation de la couche du niveau à la même latitude, c'est-à-dire la différence entre le rayon vecteur et le rayon polaire rapportée à ce dernier.

La déformation équatoriale sur la surface libre sera représentée par e_1, c'est donc la différence du rayon équatorial E au rayon polaire P rapportée à ce dernier, $e_1 = \frac{E - P}{P}$. L'aplatissement au sens ordinaire est $\alpha = \frac{E - P}{E}$ et les inverses de ces deux quantités sont liées par la relation

(189) $$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{e_1} + 1.$$

C est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe polaire, A par rapport à un axe équatorial.

Enfin, u, v, r sont trois constantes liées par la relation

$$v + r = \frac{2}{7} u^2. \tag{190}$$

Elles n'ont pas de dimension physique, ce sont des nombres purs. Il en est de même des quantités suivantes :

$$\Lambda = \frac{\omega^2 t_1^3}{2 i M} \tag{191}$$

et

$$\tau = \frac{t}{t_1}. \tag{192}$$

La surface libre correspond à la valeur $\tau = 1$ du paramètre τ, les surfaces de niveau extérieures à des valeurs $\tau > 1$, et les surfaces d'égale densité intérieures à $\tau < 1$.

La constante Λ est de l'ordre de ω^2. Nous appellerons résultats après la première approximation ceux dans lesquels on néglige les termes en Λ^2, et résultats après la seconde approximation ceux dans lesquels on ne néglige que les termes d'un ordre supérieur à Λ^2. La seconde approximation tient compte des termes de l'ordre de la quatrième puissance de la vitesse angulaire.

Le procédé uniforme permettrait de calculer les termes d'un ordre quelconque ω^{2n}, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$; mais, pour la géodésie, l'ordre $n = 2$ suffit amplement, ainsi qu'on va le voir.

La déformation est, à l'intérieur comme à l'extérieur proche,

$$e(\tau, \theta) = m(\tau) \sin^2\theta - n(\tau) \sin^2\theta \cos^2\theta \tag{193}$$

et, pour $\tau \geq 1$

$$m(\tau) = \Lambda(\tau^3 + u\tau^{-2}) + \Lambda^2(3\tau^3 + 3u\tau - r\tau^{-4}), \tag{194}$$

$$n(\tau) = \Lambda^2(3\tau^3 + u\tau - 7v\tau^{-4}). \tag{195}$$

La pesanteur sur l'axe polaire est, à l'extérieur et jusqu'au pôle :

$$g(\tau) = \frac{iM}{t_1^2}(\tau^{-2} - 2\Lambda u\tau^{-4} + 8\Lambda^2 r\tau^{-6}). \tag{196}$$

Les variations de la pesanteur avec le complément θ de la latitude sont, rapportées à la pesanteur sur l'axe polaire,

$$\frac{g(\tau, \theta)}{g(\tau)} = 1 - X(\tau) \sin^2\theta + Y(\tau) \sin^2\theta \cos^2\theta \tag{197}$$

et, pour $\tau \geq 1$,

$$X(\tau) = A(4\tau^3 - u\tau^{-2}) + A^2\left(5\tau^6 + 14u\tau - 3\rho\tau^{-4} - \frac{1}{7}u^2\tau^{-4}\right), \tag{198}$$

$$Y(\tau) = A^2(7\tau^6 + 14u\tau + 21\rho\tau^{-4} + u^2\tau^{-4}). \tag{199}$$

Ces variations s'expriment aussi au moyen de la latitude géographique; nous les rapporterons à la pesanteur sur l'équateur

$$\frac{g'}{g'_{\text{équa}}} = 1 + x\sin^2\theta' - y\sin^2\theta'\cos^2\theta' \tag{200}$$

et, pour $\tau \geq 1$,

$$x = A(4\tau^3 - u\tau^{-2}) + 3A^2(7\tau^6 + 2u\tau + r\tau^{-4}), \tag{201}$$

$$y = A^2(+9\tau^6 - 2u\tau - 5u^2\tau^{-4} - 21\rho\tau^{-4}). \tag{202}$$

La constante u est liée à la différence des moments d'inertie par la relation

$$u = 3i\frac{C - A}{\omega^2}t_1^{-5}. \tag{203}$$

Elle est toujours comprise entre les limites $0 \leq u \leq \frac{3}{2}$.

La valeur $\frac{3}{2}$ répond à la masse homogène et 0 au cas où toute la matière serait concentrée à l'origine.

Pour la Terre, on doit avoir

$$-6 + 8u + 14u^2 < 28r < 9 - 2u + 14u^2 \tag{204}$$

et pour une planète quelconque, en état d'équilibre relatif,

$$-6 + 8u + 14u^2 < 28r < 54 - 32u + 14u^2. \tag{205}$$

La différence δ entre la surface de niveau de paramètre τ, de rayon polaire t, et l'ellipsoïde de comparaison, tangent au pôle et à l'équateur à la surface précédente, est

$$\delta = -\frac{1}{2}tA^2E(\tau)\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{206}$$

et, pour $\tau \geq 1$,

$$E(\tau) = 3\tau^6 - 4u\tau - 3u^2\tau^{-4} - 14\rho\tau^{-4}. \tag{207}$$

Pour la Terre $E(1) > 0$, l'ellipsoïde de comparaison est en dessus du géoïde. C'est un résultat de Callandreau. Enfin $E'(1) \geq 0$, la correction diminue quand on passe de la surface libre aux surfaces d'égale densité voisines.

76. **Les résultats classiques.** — Réduits aux termes en ω^2, puis, pris

pour la surface libre $\tau = 1$ et dans le plan équatorial $\theta' = 0$, les résultats précédents s'écrivent :

$$e_1 = \Lambda(1 + u), \tag{208}$$

$$x = \Lambda(4 - u), \tag{209}$$

$$0 \leqq u \leqq \frac{3}{2}, \tag{210}$$

$$u = 3i\frac{C - A}{\omega^2} t_1^{-5}, \tag{211}$$

$$x = \frac{g_{\text{pôle}} - g_{\text{équa}}}{g}. \tag{212}$$

Ces relations expriment, sous une forme condensée, les principaux théorèmes classiques. En effet, introduisons pour simplifier le rapport

$$\varphi = \frac{\omega^2 t_1}{g} \quad \text{ou} \quad \varphi = 2\Lambda.$$

Dès lors, en éliminant u entre (208) et (211), on trouve *l'équation de d'Alembert*,

$$e_1 - \frac{1}{2}\varphi = \frac{3}{2}\frac{i}{g}(C - A)t_1^{-4}.$$

L'addition membre à membre de (208) et (209) donne $e_1 + x = 5\Lambda$ qui n'est autre que *la relation de Clairaut*,

$$\text{aplat} + \frac{g_{\text{pôle}} - g_{\text{équa}}}{g} = \frac{5}{2}\varphi.$$

Enfin, les équations (208) et (209) et les inégalités (210) donnent

$$\frac{1}{2}\varphi \leqq e_1 \leqq \frac{5}{4}\varphi \leqq x \leqq 2\varphi,$$

relations qui constituent, elles aussi, un remarquable théorème du même auteur.

77. **Les relations sur la surface libre en seconde approximation.** — Tenons compte des termes en Λ^2 et introduisons la constante $\mathcal{J}$ liée aux mesures précessionnelles. Faisons enfin $\tau = 1$ et nous trouverons

$$e_1 = \Lambda(1 + u) + \Lambda^2(3 + 3u - r), \tag{213}$$

$$x = \Lambda(4 - u) + 3\Lambda^2(7 + 2u + r). \tag{214}$$

La constante r est limitée par les inégalités (204). Les constantes Λ et u sont elles-mêmes liées entre elles par les relations

$$\Lambda = \frac{\omega^2}{2}\frac{t_1}{g_{\text{pôle}}}h \tag{215}$$

avec

$$h = 1 - 2\Lambda u + 8\Lambda^2 r, \tag{216}$$

où apparaissent le rayon polaire t_1 et la pesanteur au pôle. Enfin, les constantes Λ, $\mathcal{J}$ et u sont liées par les relations (188) (pour *f voir* § 74),

$$\frac{\mathcal{J}}{\Lambda}(1+4\mathcal{J}) \geqq f(u) \geqq \frac{\mathcal{J}}{\Lambda}(1+4\mathcal{J}-5\Lambda). \tag{217}$$

On pourrait naturellement tirer de ces formules des relations qui généraliseraient les théorèmes classiques; mais nous préférons les laisser sous cette forme succincte.

Le véritable problème à résoudre est celui-ci : montrer qu'il y a accord entre les relations précédentes et les faits d'observation.

1° Les réseaux géodésiques font connaître la déformation équatoriale e_1 et le rayon terrestre moyen;

2° Les mesures de pesanteur font connaître

$$x = \frac{g_{\text{pôle}} - g_{\text{équa}}}{g_{\text{équa}}}; \tag{218}$$

3° Enfin, les mesures précessionnelles fournissent la constante $\mathcal{J}$ qui est, comme on le verra, liée à la constante p de la précession générale.

78. **Le désaccord souligné par Poincaré.** — En 1885, dans un Mémoire aux *Acta mathematica*, puis en 1903, dans ses *Figures d'équilibre* (p. 92-96), Poincaré montre qu'il y a un désaccord en première approximation entre les trois ordres de mesure. Voici comment ce désaccord apparaît avec notre méthode. Le rapport φ peut s'écrire, à ω^4 près,

$$\varphi = \frac{\omega^2 t_1}{g} = \frac{\omega^2 t_1^3}{iM} = 2\Lambda. \tag{219}$$

Prenons pour φ la valeur communément admise

$$\varphi = \frac{1}{288,38} \quad \text{(Poincaré)}, \qquad \varphi = \frac{1}{288,4} \quad \text{(Pizzetti)}.$$

Prenons, d'autre part, pour $\mathcal{J}$ la même valeur que Poincaré

$$\mathcal{J} = \frac{1}{305,31}.$$

Ceci étant, la relation (217) réduite au premier ordre, donne

$$\frac{\mathcal{J}}{\Lambda} = f(u),$$

d'où $u = 0,94$. La formule $e_1 = \Lambda(1+u)$ donne ensuite $\frac{1}{e_1} = 297,3$ et pour l'inverse de l'aplatissement

$$\frac{1}{\alpha} = 298,3,$$

tandis que Poincaré admettait, pour des raisons géodésiques, la valeur de Clarke

$$\frac{1}{\alpha} = 293,5.$$

La différence relative de $\frac{1}{60}$ environ entre ces deux chiffres lui paraissait inadmissible à juste titre.

Callandreau avait déjà entrepris une étude en deuxième approximation par une méthode toute différente de la nôtre et il était arrivé à cette conclusion que l'influence des termes en ω^4 reviendrait à creuser la surface terrestre de 9^m seulement entre le pôle et l'équateur.

Nous regrettons de ne pouvoir souscrire à cette conclusion qui revient à supposer nul le terme en Λ^2 de l'expression (213) de e_1 et à négliger ainsi 300^m dans la différence des rayons. Poincaré invoque l'étude de Callandreau et doute que la seconde approximation puisse expliquer la divergence entre les mesures géodésiques et les mesures précessionnelles. L'illustre savant se demandait s'il ne fallait pas renoncer à l'hypothèse primordiale de la fluidité du globe terrestre pris dans son ensemble.

L'influence des termes en ω^4 se manifeste au contraire doublement. Ils augmentent u à partir de $\mathcal{J}$ et e_1 à partir de u. Et, *indépendamment de toute autre hypothèse*, les valeurs de Poincaré

$$\mathcal{J} = \frac{1}{305,31}, \qquad \varphi = \frac{1}{288,38}$$

donnent les limites suivantes pour l'inverse de l'aplatissement :

$$293,75 < \frac{1}{\alpha} < 295,9.$$

La conclusion n'est guère modifiée si l'on prend au lieu de t_1 et g dans φ le rayon équatorial et la pesanteur équatoriale. Il faut alors écrire

$$\varphi = \omega^2 t_1 \frac{1+e_1}{g_{\text{équa}}}$$

et les formules (193) et (200) impliquent

$$\Lambda = \frac{\varphi}{2}\left[1 - \frac{\varphi}{2}(5+2u)\right].$$

La valeur adoptée par Poincaré pour φ donne maintenant environ

$$\Lambda = \frac{1}{583,5}.$$

Avec la même valeur de $\mathcal{J}$ que précédemment, on trouve

$$294,36 < \frac{1}{\alpha} < 296,5.$$

Ces limites sont toutes deux plus rapprochées du chiffre de Clarke : 293,5 que l'aplatissement précédent : 298,3.

On conçoit ainsi la possibilité d'établir un accord complet entre les trois ordres de mesure. C'est ce que nous allons tenter au paragraphe 79.

Avant cela, rappelons les inverses des aplatissements admis depuis un siècle par différents géodésiens, mentionnons aussi quelques valeurs de x déterminées par les mesures de pesanteur :

Bessel en 1841	299
Clarke en 1880	293,5
Helmert en 1907	298,3
Hayford en 1909	297
Helmert en 1915	296
Helbronner en 1929 (par le réseau des Alpes françaises)	293,3

Airy en 1826	$x = 0,00513$
Clarke en 1880	0,00523
Helmert en 1884	0,00531
» en 1903	0,00530
» en 1915	0,005285

Enfin, en 1915, M. E. Brown montrait que le chiffre 294 est celui qui conviendrait le mieux à la théorie de la Lune.

79. **Les éléments fondamentaux.** — Les éléments les mieux déterminés par les mesures astronomiques et géodésiques, j'entends ceux pour lesquels l'erreur relative est la plus faible, sont : la vitesse angulaire ω, le rayon terrestre moyen, la pesanteur en différents points, la constante p de la précession générale dont on déduit $\mathcal{J}$. Or, il se trouve que les géodésiens paraissent s'accorder sur les valeurs suivantes du rayon polaire et de la pesanteur au pôle :

$$t_1 = 6356,5 \text{ km}, \quad \pm 5 \qquad g_{\text{pôle}} = 983,20 \text{ cm}. \quad \pm 5$$

Pour la valeur $\mathcal{J}$, nous prendrons tout d'abord le chiffre indiqué par

Poincaré, mais nous y ajouterons un facteur de correction k dont nous discuterons les limites possibles dans un paragraphe spécial. Posons donc

$$\mathcal{J} = \frac{1}{305,31}\, k. \tag{220}$$

Si $k = 1$, Λ est compris entre les limites suivantes, comme on le montre par les relations du paragraphe 77

$$\frac{1}{583,8} < \Lambda < \frac{1}{583,55}; \tag{221}$$

l'écart provient des erreurs admises ci-dessus pour t_1, $g_{\text{pôle}}$ et des inégalités (217).

Mettons, alors, en regard, différentes valeurs de l'inverse de l'aplatissement qui sont encore aujourd'hui prises en considération et les valeurs de u, de x, de $g_{\text{équa}}$ et enfin de $\log k$ correspondantes. Pour ce dernier facteur, nous indiquerons toujours deux limites qui proviennent de l'indétermination à 10^{-4} près de la constante ψ figurant dans $f(u)$ et des écarts admis ci-dessus pour t_1, $g_{\text{pôle}}$ et Λ :

$\frac{1}{\alpha}$.	u.	x.	$g_{\text{équa}}$.	
300	0,943	5321	977,996	$-1058 < \log k < -606$
299	0,949	5311	978,007	$-901 < \;\;\gg\;\; < -449$
298	0,956	5299	978,016	$-702 < \;\;\gg\;\; < -250$
297	0,962	5290	978,027	$-587 < \;\;\gg\;\; < -135$
296	0,969	5276	978,038	$-338 < \;\;\gg\;\; < +6$
295	0,976	5265	978,050	$-162 < \;\;\gg\;\; < +290$
294	0,983	5253	978,062	$+24 < \;\;\gg\;\; < +476$

Les chiffres relatifs à $g_{\text{équa}}$ sont à prendre à $\pm 0,050$ près. Pour x il faudrait écrire 0,005321 etc. et pour $\log k$: $-0,01058$ et $+0,00476$ par exemple.

Si l'on suppose rigoureusement exacte la valeur de $\mathcal{J}$ prise par Poincaré, il faut remplacer $\log k$ par zéro et seuls les chiffres 296 et 295 conviennent. Mais il importe de discuter, à première vue tout au moins, les écarts possibles pour $\mathcal{J}$ en vertu de la théorie de la précession.

80. La constante $\mathcal{J}$ et les mesures précessionnelles. — Dans les paragraphes précédents, la constante $\mathcal{J}$ représente le rapport

$$\frac{C - A}{C}.$$

Cette valeur $\mathfrak{I}$ est liée à une autre $\mathfrak{I}_1$ par la relation

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{I}_1}{1 - \frac{2}{3}\mathfrak{I}_1}.$$

La constante $\mathfrak{I}_1$ est proportionnelle à la valeur p de la précession générale et l'on a, d'après Poincaré,

$$866135\,\frac{\mu}{1+\mu} + 4871{,}05 = \frac{p}{\mathfrak{I}_1}.$$

Le rapport μ est celui de la masse de la Lune à celle de la Terre. D'après MM. Hinks et Brown, on a $\frac{1}{\mu} = 81{,}53 \pm 5$ et la valeur de p est exprimée en secondes d'arc par année au moyen de la relation de Newcomb

(222) $$p = 50'',2564 + 0'',000222\,(T - 1900).$$

1° Prenons $T = 1900$, ce qui donne

$$\frac{1}{\mathfrak{I}_1} = 305{,}75 \pm 13 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mathfrak{I}} = 305{,}08 \pm 14,$$

ou encore

$$0{,}00016 < \log k < 0{,}00051.$$

2° M. de Sitter estime que p est déterminé par les mesures précessionnelles à $0'',1$ près par siècle, c'est-à-dire à $0'',001$ près par année, ce qui donne

$$-0{,}00001 < \log k < +0{,}00001.$$

3° Suivant M. de Sitter, la théorie d'Einstein apporte à la précession générale une correction de $1'',91$ par siècle. Prenons $2''$, ce qui donne

$$-0{,}00020 < \log k < +0{,}00020.$$

Ajoutons ces corrections

$$-0{,}00005 < \log k < 0{,}00072.$$

Dans ces circonstances, l'aplatissement d'inverse 297 reste exclu, les chiffres 296 et 295 restent possibles, 294 le devient, tandis que 293 reste exclu.

81. **Conclusions.** — *L'hypothèse de la fluidité du globe terrestre, pris dans son ensemble, reste de beaucoup la plus naturelle, au point de vue géodésique.*

Si l'on s'en tient aux nombres entiers pour l'inverse de l'aplatissement, le chiffre 295 *est compatible avec les mesures fondamentales,*

les chiffres 296 *et* 294 *pourraient éventuellement convenir aussi, mais les autres sont exclus.*

En 1915, Helmert adoptait le chiffre 296 pour des raisons géodésiques, après avoir admis des chiffres supérieurs, 298,3 par exemple. La même année, M. E. Brown montrait que le chiffre 294 est celui qui convient le mieux à la théorie de la Lune, après avoir admis antérieurement 297. Nous trouvons 295 avec un écart possible comprenant les chiffres de Helmert et de M. E. Brown.

Le problème posé par d'Alembert de l'accord entre les mesures géodésiques et précessionnelles se résout en tenant compte des termes de l'ordre de la quatrième puissance de la vitesse angulaire.

Le tableau du paragraphe 79 est construit avec les seules données ω, t_1, $\mathcal{J}$ et $g_{\text{pôle}}$. La manière dont la matière se répartit à l'intérieur du globe n'intervient que par la valeur de la pesanteur en un point, au pôle dans le cas particulier.

Les limites de l'aplatissement indiquées ci-dessus sont donc indépendantes de la façon dont les densités sont distribuées à l'intérieur de la Terre.

A ce propos, dans une intéressante étude qu'il ne m'est plus possible de reproduire ici, M. Tiercy (1) a montré que nos valeurs de A et l'aplatissement d'inverse 294 se concilient en particulier avec la loi de Roche

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha r^2),$$

et donnent une densité superficielle pouvant aller jusqu'à 2,6 tandis que les anciennes valeurs de φ donnaient une densité superficielle inférieure à 2,1, ce qui paraît invraisemblable (2).

D'autre part, la formule donnant la variation de la pesanteur avec la latitude géographique, s'écrit :

$$\frac{g}{g_{\text{équa}}} = 1 + x \sin^2\theta - y \sin^2\theta \cos^2\theta.$$

Les géodésiens indiquent souvent pour y une valeur positive a, mais avec un écart z dans les deux sens supérieur à a, $y = a \pm z$, de sorte que la vraie valeur de y paraîtrait pouvoir être négative.

Les inégalités (205) et l'expression (202) de y montrent ceci :

Pour toute planète, le nombre y est positif, en théorie.

Pour la Terre, on aurait $+0,00002 < y < 0,00004$.

---

(1) G. Tiercy, *De la densité superficielle moyenne de la Terre* (*Archives des Sciences physiques et naturelles*, mars-avril 1930).

(2) Boaga, *Atti del R. Istituto Venezo di Scienze, Lettere ed Arti*, 7 juillet 1929.

Enfin, les limites de u compatibles avec les mesures de g, de α et avec la théorie de la précession, sont

$$0,969 < u < 0,983.$$

Elles montrent que r est lui-même limité par

$$0,50 < r < 0,75.$$

Ces limites, jointes aux suivantes

$$\frac{1}{583,8} < A < \frac{1}{583,5},$$

permettent de calculer les coefficients X, Y, x, y, $m(1)$, $n(1)$ des formules du paragraphe 75 et donnent en particulier, pour la correction à partir de l'ellipsoïde de comparaison, un chiffre de 17^{m} au plus.

Je n'éprouve pas le besoin de proposer des valeurs plus précises pour A, u, r et cela à cause de l'hétérogénéité de la surface terrestre, océans, montagnes, etc. Une précision plus grande me paraît illusoire dans l'état actuel de nos connaissances. Mais, grâce au développement de la technique, les mesures astronomiques et géodésiques deviendront de plus en plus exactes et l'on pourra diminuer les écarts sur les mesures fondamentales, ce qui permettra de resserrer les limites des constantes A, u, r dont dépendent les déformations et les variations de la pesanteur.

Poincaré aimait à dire qu'il n'y a pas de problème important qui soit résolu; il n'y a que des problèmes plus ou moins résolus. Notre recherche, dont l'intérêt est avant tout mathématique, n'a visé qu'à mieux résoudre le problème des figures d'équilibre dont dépend la géodésie supérieure.

Prise dans son ensemble, la Terre est un cosmos susceptible d'une théorie mathématique. Elle n'a que les apparences d'un chaos. La géodésie supérieure est une science où l'accord entre les faits observés et les éléments prévus par le calcul se concilient aussi bien, si ce n'est mieux, que dans bien d'autres domaines dits scientifiques.

CHAPITRE IX.

AUTRES APPLICATIONS.

82. Le potentiel newtonien à l'extérieur de l'astre. — Le procédé uniforme permet d'exprimer le potentiel newtonien à l'extérieur de l'astre au moyen des constantes A, u, r qui interviennent dans l'aplatissement.

D'autre part, on peut facilement calculer ce potentiel à grande distance de la masse attirante par un calcul classique, celui du paragraphe 14.

Enfin, pour l'étude du mouvement des satellites de Jupiter, M. Sampson et Andoyer donnent, du même potentiel, une autre expression encore.

Il s'agit de comparer entre eux ces trois développements; ce sera l'objet de ce paragraphe.

Pour abréger les expressions du potentiel, nous supposerons la constante i de l'attraction égale à 1 et la masse de révolution. On sait, en plus, que cette dernière admet un plan de symétrie, perpendiculaire à l'axe. Soient : R la distance du point potentié P au centre O de l'astre et θ l'angle de OP avec l'axe de révolution.

1° Au paragraphe 14, formule (20), nous avons trouvé

$$U = \frac{M}{R} - \frac{C - A}{R^3} X_2(c\theta) + \frac{E - 6F + G}{R^5} X_4(c\theta). \tag{223}$$

Les lettres A, C, E, F, G représentent des moments d'inertie de la masse potentiante. Si ρ est la densité et OZ l'axe de révolution, on doit poser

$$C = \int \rho(x^2 + y^2)\, dV, \qquad E = \int \rho x^4\, dV$$

$$A = \int \rho(x^2 + z^2)\, dV, \qquad G = \int \rho z^4\, dV$$

$$F = \int \rho x^2 z^2\, dV.$$

2° Dans un Chapitre consacré aux mouvements des anciens satellites de Jupiter, Andoyer (1) donne un développement de U qui se ramène

(1) *Cours de Mécanique céleste*, t. II, p. 402 (édit. 1926).

facilement à la forme simple suivante :

$$(224) \qquad U = M\left[\frac{1}{R} - \frac{2}{3}\frac{\mathcal{J}a^2}{R^3}X_2(c\theta) + \frac{8}{15}\frac{\mathcal{J}'a^4}{R^5}X_4(c\theta)\right],$$

où a est le rayon équatorial de la planète, puis $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ des constantes auxquelles M. Sampson et Andoyer attribuent certaines valeurs numériques afin de rendre compte du mouvement des quatre premiers satellites.

3° Enfin le procédé uniforme fournit l'expression suivante :

$$(225) \qquad U = \frac{M}{R}\left[1 - \frac{2}{3}\Lambda u\left(\frac{t_1}{R}\right)^2 X_2(c\theta) + \frac{8}{5}\Lambda^2 r\left(\frac{t_1}{R}\right)^4 X_4(c\theta)\right].$$

La comparaison des développements (223), (224) et (225) donne

$$(226) \qquad u = \frac{3i}{\omega^2}(C - A)t_1^{-5},$$

$$(227) \qquad r = \frac{5}{2}\frac{i^2}{\omega^4}Mt_1^{-10}(E - 6F + G),$$

$$(228) \qquad u = \frac{\mathcal{J}}{\Lambda}\frac{a^2}{t_1^2},$$

$$(229) \qquad r = \frac{1}{3}\frac{\mathcal{J}'}{\Lambda^2}\frac{a^4}{t_1^4},$$

$$(230) \qquad \mathcal{J}a^2 = \frac{3}{2}\frac{C - A}{M},$$

$$(231) \qquad \mathcal{J}'a^4 = \frac{15}{8}\frac{E - 6F + G}{M}.$$

La première de ces relations a déjà été obtenue au paragraphe 74. La seconde (227) donne l'interprétation de la constante r qui, comme u, est une constante stokienne. L'expression $E - 6F + G$ ne dépend donc, pour une figure d'équilibre, que de la surface libre, de la vitesse angulaire et de la masse totale. C'est un nouvel invariant intégral relativement aux différentes répartitions des densités à l'intérieur de la planète.

83. Données et premiers résultats relatifs aux planètes. — Lorsque l'on ne fait pas soi-même de l'observation astronomique, rien n'est plus embarrassant que d'interpréter certaines tables de constantes où les astronomes réunissent ce que l'observation nous apprend des planètes. On trouvera par exemple les rayons équatoriaux et polaires de Jupiter indiqués à 10^m près : $71372^{km},71$ et $66617^{km},91$. Ailleurs, on trouve pour les mêmes rayons des chiffres qui diffèrent des précédents par 50^{km} et même 75^{km}. Alors, pourquoi donc indiquer les centièmes si l'on n'est

pas sûr des centaines? A cet égard, il est intéressant de rappeler quelle distance latérale correspond sur la Lune, le Soleil, Jupiter et Saturne au dixième de seconde d'arc, seuil au delà duquel une mesure directe d'angle ou de différence d'angle devient imprécise.

Un arc de 0″,1 correspond sur la Lune à 180^{m}, sur le Soleil à 70^{km}, sur Jupiter à 300^{km} et sur Saturne à 600^{km} en chiffre rond et au moment où ces deux derniers corps sont le plus rapprochés de nous.

Le relief de la Lune, les protubérances solaires, la grande atmosphère dont les grosses planètes sont entourées créent une difficulté de plus pour l'obtention de chiffres précis relatifs aux rayons, que l'on procède par mesure d'arc ou par le passage d'étoiles ou de satellites derrière les astres envisagés.

Voici également en *chiffre rond*, pour quelques corps célestes : le rayon polaire; le logarithme vulgaire de la masse, satellites et anneaux compris, rapportés à la masse du Soleil; et la durée de la révolution :

Soleil.....	695550	km	0	25 jours-28 jours au moins
Jupiter....	66620	-	$\bar{4},9800$	9 h. 50 m.- 9 h. 55 m.
Saturne....	54050	-	$\bar{4},4557$	10 h. 14 m.-10 h. 38 m.
Uranus.....	24840	-	$\bar{5},6408$	10 h. 45 m.
Terre.....	6356,5	-	$\bar{6},4770$	24 h.

Les trois premiers corps présentent le mouvement zonal et la révolution n'est pas la même au pôle et à l'équateur. Mais le tableau précédent suffit pour se faire une idée de l'ordre de grandeur du rapport

$$\Lambda = \frac{\omega^2 l_1^3}{2fM},$$

suivant les puissances duquel nos approximations procèdent. Cette constante est indépendante de tout choix d'unité. Entre Λ pour un astre quelconque et $\Lambda_\oplus$ pour la Terre, il existe la relation

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_\oplus} = \left(\frac{\text{rayon}}{\text{ray}_\oplus}\right)^3 \cdot \left(\frac{\text{masse}}{\text{mas}_\oplus}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\text{révolution}}{\text{révol}_\oplus}\right)^{-2}.$$

Pour chacun des corps envisagés ci-dessus, *les valeurs de* Λ *sont environ :*

Soleil.	Terre.	Jupiter.	Saturne.	Uranus.
$\frac{1}{120000}$	$\frac{1}{583,5}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{26}$

Le carré du chiffre relatif à Saturne est supérieur au chiffre relatif à la Terre, ce qui signifie qu'une étude de Saturne en deuxième approximation laisse plus d'erreurs possibles qu'une étude de la Terre en première

approximation. Pour Jupiter et Uranus, un accord ou un désaccord après la seconde approximation correspondrait à un accord ou à un désaccord après la première approximation dans le domaine géodésique. Tandis que pour le Soleil, il serait vain de tenir compte des termes en Λ^2.

Les formules qui lient l'aplatissement α à la déformation équatoriale e_1 et cette dernière aux constantes Λ, u et r sont :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{e_1} + 1, \qquad e_1 = \Lambda(1+u) + \Lambda^2(3+3u-r).$$

L'influence du terme r est si faible qu'on peut le négliger à première vue, et les valeurs de α observées font connaître l'ordre de grandeur de u. Cette constante est liée à η_1 par la relation

$$\eta_1 = \frac{3-2u}{1+u}.$$

Le paramètre η_1 serait nul pour une masse homogène et égal à trois pour une masse tout entière concentrée. On peut bien dire que η_1 mesure le degré de concentration de l'astre. Voici alors différents renseignements :

Jupiter.....	$\frac{1}{15} \geqq \alpha \geqq \frac{1}{16}$	$0{,}62 < u < 0{,}75$	$0{,}86 < \eta_1 < 1.09$
Saturne.....	$\frac{1}{9} \geqq \alpha \geqq \frac{1}{10}$	$0{,}50 < u < 0{,}66$	$1{,}00 < \eta_1 < 1{,}33$
Terre	$\frac{1}{294} \geqq \alpha \geqq \frac{1}{296}$	$0{,}969 < u < 0{,}983$	$0{,}52 < \eta_1 < 0{,}54$

Les deux grosses planètes sont donc plus concentrées que la Terre, mais moins qu'on ne l'affirme d'ordinaire. Callandreau et M. Véronnet obtiennent pour Saturne $\eta_1 = 2{,}56$, chiffre voisin de la concentration totale $\eta_1 = 3$. Je ne pourrais retrouver ce chiffre qu'en admettant que l'anneau représente une portion importante de la masse de la planète.

Remarque. — La pesanteur et ses variations ne sont pas directement mesurables pour les astres sur lesquels nous n'habitons pas. La constante x, différence de la pesanteur au pôle et à l'équateur rapportée à cette dernière, ne nous est pas connue, comme dans le domaine géodésique. C'est un renseignement qui nous fait défaut. Par contre, les mouvements des satellites autour de Jupiter et de Saturne constituent une donnée importante et jouent un rôle analogue au mouvement de la Lune pour la Terre. Pratiquement le mouvement des satellites permet d'indiquer avec plus ou moins de précision la valeur des coefficients des termes en R^{-4} et en R^{-5} du développement du potentiel à l'extérieur de l'astre.

Le premier coefficient n'est autre que la masse gravifique ιM de la planète, le second joue un rôle analogue à la constante $\mathcal{J}$ liée aux mesures de précession.

84. **Le cas de Jupiter.** — Je voudrais ici examiner si les chiffres relatifs à Jupiter indiqués par M. Sampson et adoptés par Andoyer sont compatibles avec la théorie des figures d'équilibre. Les formules essentielles se réduisent à ceci :

$$u = \frac{\mathcal{J}}{\Lambda}(1+e_1)^2, \qquad r = \frac{1}{3}\frac{\mathcal{J}'}{\Lambda^2}(1+e_1)^4,$$

$$e_1 = \Lambda(1+u) + \Lambda^2(3+3u-r), \qquad \frac{1}{e_1} = \frac{1}{\alpha} - 1.$$

Nous savons que le terme r n'a qu'une importance minime, nous le négligerons. Il reste donc à concilier les chiffres suivants de M. Sampson :

$$t_1 = 66618\,\text{km}, \qquad \mathcal{J} = 0{,}02227, \qquad \alpha = \frac{1}{15}$$

avec le rapport des masses de Jupiter et de la Terre que nous prenons égal à 317 ± 2 et avec la rotation de $9^h 52^m$ environ. Le rayon polaire t_1 de M. Sampson sera pris, d'autre part, à 100^{km} près. J'obtiens

$$\frac{1}{27{,}7} < \Lambda < \frac{1}{26{,}7}.$$

Ensuite, supposant $\mathcal{J}$ connu exactement, je trouve $\alpha = \frac{1}{17}$ après la première approximation et $\alpha = \frac{1}{15{,}5}$ après la seconde. Ce dernier chiffre est-il admissible ? Il correspond à une différence entre les axes de 200^{km} de moins que l'aplatissement $\alpha = \frac{1}{15}$ admis par M. Sampson. C'est inférieur au dixième de seconde d'arc.

L'aplatissement $\frac{1}{15}$ étant au contraire admis, je trouve $\mathcal{J} > 0{,}0223$; le mouvement des satellites permet-il cette correction ?

Il y aurait à ajouter différentes corrections relativistes (1). Le mouvement des satellites de Jupiter a été étudié dans la théorie d'Einstein par M. de Sitter.

Au point de vue newtonien, la solution qui me paraît la plus vraisemblable serait de prendre un aplatissement voisin de celui de

(1) Chazy, *La théorie de la relativité et la Mécanique céleste*, 1928, p. 79.

Struve $\frac{1}{15,4}$ et une valeur de $\mathcal{J}$ légèrement plus grande que celle de M. Sampson.

Sans vouloir préciser davantage, puisque nous sommes au seuil de ce qui est vérifiable et qu'une troisième approximation serait utile, je dirai qu'en seconde approximation les chiffres

$$\mathcal{J} = 0,02227, \qquad \Lambda = \frac{1}{27,3}, \qquad \alpha = \frac{1}{15,6},$$
$$\mathcal{J}' = 0,001465, \qquad u = 0,7, \qquad r = 0,3$$

se concilient au point de vue de la théorie newtonienne des figures d'équilibre.

85. **Figures à anneaux.** — Le procédé uniforme s'appliquerait à la recherche des figures annulaires; il suffirait de prendre un point de densité maximum intérieur à l'anneau comme origine des coordonnées polaires. L'identité de Green (5) s'applique encore au cas où les surfaces de niveau ont la connexion du tore et il n'y a pas théoriquement de difficultés nouvelles, mais je ne dois pas cacher qu'il y a de grandes difficultés pratiques à résoudre, dans ce cas, les équations du problème.

D'autre part, l'anneau de Saturne est très probablement composé d'une multitude de corps distincts et distants les uns des autres qui gravitent autour de la planète comme autant de satellites distribués suivant des circonférences concentriques.

Pour ces raisons, nous n'avons pas entrepris l'étude des figures annulaires et ne voulons écrire ici que les équations de la figure de la planète, étant admise l'existence d'un ou plusieurs anneaux. Il suffira d'ajouter au potentiel newtonien de la zone Z le potentiel newtonien créé par les anneaux.

L'équation de Poincaré est la même que si la planète était isolée, et la condition nécessaire et suffisante s'écrit :

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{g\,dS}{r} + \frac{\omega^2}{2\pi}\int \frac{dC}{r} + i\int \frac{\rho}{r}\,dZ = \Phi - Q - i\int \frac{\rho}{r}\,dA; \tag{232}$$

dA est l'élément des anneaux, les autres notations ont déjà été employées et sont les mêmes qu'au Chapitre IV.

Sur l'axe de rotation, à distance t du centre, l'inverse de la distance d'un point potentié aux différents points d'un anneau équatorial de rayon a est

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{t}\left[1 + \left(\frac{a}{t}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left[1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}};$$

suivant que t est supérieur ou inférieur à a, on pourra donc écrire

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{t}\sum_{q=0}^{+\infty} c_{2q}\left(\frac{a}{t}\right)^{2q}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{a}\sum_{q=0}^{+\infty} c_{2q}\left(\frac{t}{a}\right)^{2q},$$

les c_{2q} étant les coefficients du développement en série de

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Le potentiel sera lui-même, pour un anneau de rayon a et de masse totale M,

$$i\frac{M}{a}\sum_{q=0}^{+\infty} c_{2q}\left(\frac{\tau}{a}\right)^{2q} X_{2q}(c\theta) \tag{233}$$

à la distance τ du centre et à la colatitude θ pour $\tau < a$, et

$$i\frac{M}{R}\sum_{q=0}^{+\infty} c_{2q}\left(\frac{a}{R}\right)^{2q} X_{2q}(c\theta) \tag{234}$$

à distance R du centre et à même latitude pour $R > a$.

Dans la condition (232), seul le premier développement (233) figurera, on le sait, puisque τ peut être supposé aussi petit que l'on veut. Cette condition donne lieu au système fondamental

$$\{R\}_q = \begin{cases} iM_0 & \text{si } q = -1, \\ \Phi - ic_0\sum\dfrac{M}{a} & \text{si } q = 0, \\ \left(\dfrac{5}{3}\omega^2 - ic_2\sum\dfrac{M}{a^3}\right)X_2(c\theta) & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 5, 7, \ldots, \\ -ic_q\sum\dfrac{M}{a^{q+1}}X_q(c\theta) & \text{si } q = 4, 6, 8, 10, \ldots. \end{cases}$$

Ces équations s'appliquent s'il y a plusieurs anneaux distincts; les Σ se rapportent à ces différents anneaux. M_0 est la masse de la planète.

Suivant l'ordre de grandeur des expressions

$$\frac{M}{a^{q+1}},$$

les seconds membres pourront être supposés nuls à partir d'une certaine valeur de q. Il n'y aurait pas de difficulté à résoudre ce système ce qui déterminerait l'expression U_0 du potentiel créé par la planète à l'extérieur; il suffira d'y ajouter les différents potentiels $U_1, U_2, U_3, \ldots$ créés

par les anneaux

$$U_p = \frac{iM_p}{R}\left[1 + c_2\frac{a_p^2}{R^2}X_2(c\theta) + c_4\frac{a_p^4}{R^4}X_4(c\theta)\right];$$

et le mouvement des satellites se faisant sous l'influence du potentiel $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$, on peut espérer compléter par cette méthode une étude où Tisserand s'était proposé de peser les anneaux de Saturne. Les M_p seraient les véritables inconnues qu'il s'agirait de déterminer à partir de ce que l'on observe de la planète et de ses satellites.

86. **Le problème des étoiles doubles.** — Le procédé uniforme s'applique à la recherche des figures d'équilibre de deux étoiles qui s'attirent mutuellement, le système ainsi constitué étant animé d'une rotation constante.

Pour trouver la figure de la première étoile, il suffira d'ajouter le potentiel newtonien créé par la seconde au potentiel de la zone de la première.

Un accent (′) désignera tout ce qui a trait à la première étoile, un accent (″) à la seconde. Il s'agit alors de résoudre les deux équations simultanées qui représentent la condition nécessaire et suffisante d'équilibre relatif :

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{g'}{r}\,dS' + \frac{\omega^2}{2\pi}\int\frac{dC'}{r} + i\int\frac{\rho'}{r}\,dZ' = \Phi' - Q' - i\int\frac{\rho''}{r}\,dV'',$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{g''}{r}\,dS'' + \frac{\omega^2}{2\pi}\int\frac{dC''}{r} + i\int\frac{\rho''}{r}\,dZ'' = \Phi'' - Q'' - i\int\frac{\rho'}{r}\,dV';$$

dV'' est l'élément du volume de la seconde étoile, dV' celui de la première. Q′ est à prendre dans la cavité de la première et Q″ de la seconde. Les équations de Poincaré transformées s'écrivent à leur tour :

$$\frac{1}{4\pi}\int g'\,dS' + i\int\rho'\,dZ' + \frac{\omega^2}{2\pi}\int dC' = iM',$$

$$\frac{1}{4\pi}\int g''\,dS'' + i\int\rho''\,dZ'' + \frac{\omega^2}{2\pi}\int dC'' = iM''.$$

Le système de coordonnées polaires qui paraît le plus naturel est celui-ci : la droite O′O″ qui joint les centres des deux astres sera l'axe polaire, α' sera l'angle que fait avec O′O″ le rayon vecteur O′P qui joint O′ à un point P, ψ' l'angle du plan PO′O″ avec le plan O′ωO″ qui contient les deux centres et le vecteur rotation $\vec{\omega}$. Pour la seconde étoile, on définirait de même α'' et ψ''.

Le vecteur $\vec{\omega}$ rencontre la ligne des centres en un point O qui est le

centre de gravité du système. Nous poserons

$$\overline{OO'} = a' \qquad \text{et} \qquad \overline{OO''} = a''$$

et l'on a

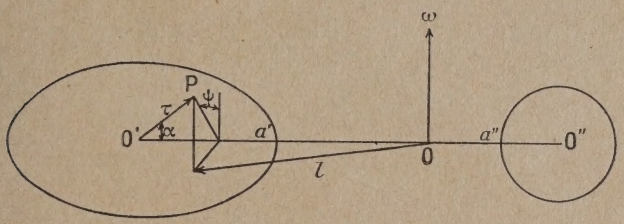
$$a'M' = a''M''.$$

La position du départ pour les approximations successives sera l'état sphérique des deux astres. Une propriété des sphères donne, avec $a = a' + a''$,

$$\omega^2 a' = \frac{iM''}{a^2}, \qquad \omega^2 a'' = \frac{iM'}{a^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \omega^2 = i\,\frac{M' + M''}{a^3}.$$

Dans l'approximation d'ordre n pour l'une des étoiles, l'autre sera supposée avoir la forme obtenue à l'approximation d'ordre $n - 1$. Ainsi,

Fig. 4.



pour obtenir la figure du premier astre en première approximation, l'autre sera supposé sphérique et, dans ce cas, son potentiel est le même que celui de la masse M'' située en O''. Des calculs sans grand intérêt théorique permettent d'écrire

$$\{R'\}_q = \begin{cases} iM' & \text{si } q = -1, \\ \Phi' - \dfrac{\omega^2}{2}a'^2 - iM''\dfrac{1}{a} & \text{si } q = 0, \\ -5\left(\dfrac{\omega^2}{6} + \dfrac{iM''}{a^3}\right)X_2(c\alpha') + 5\omega^2 X_2^{(2)}(c\alpha')c2\psi' & \text{si } q = 2, \\ -(2q+1)\dfrac{iM''}{a^{q+1}}X_q(c\alpha') & \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

et pour la seconde étoile, on aurait un système analogue en intervertissant les accents. La résolution n'offre plus de grandes difficultés, elle se fait comme précédemment. Si l'on met en évidence la déformation e, en posant $R = t(1+e)$, on retrouve au premier membre l'expression (113), page 85 :

$$\{e\}_q.$$

Enfin, en posant comme d'habitude

$$e = e_0 + \ldots + e_2^{(0)}X_2(c\alpha') + \ldots + e_2^{(2)}X_2^{(2)}(c\alpha')c2\psi' + \ldots + e_q^{(0)}X_q(c\alpha') + \ldots,$$

les équations qui régissent les coefficients mis en évidence sont

$$\{e_q\} = \begin{cases} -\frac{5}{6}\frac{i}{a^3}(M'+M'') & \text{si } q=2 \text{ et } e=e_2^{(0)}, \\ +5\frac{i}{a^3}(M'+M'') & \text{si } q=2 \text{ et } e=e_2^{(2)}, \\ -(2q+1)\frac{iM''}{a^{q+1}} & \text{pour } e_q^{(0)}. \end{cases}$$

Les coefficients $e_2^{(2)}$ et $e_q^{(0)}$ ne se présentaient pas en première approximation dans le problème des figures d'équilibre d'une masse isolée. Tous les autres coefficients sont nuls parce qu'ils correspondent à des seconds membres nuls et à l'équation $\{e\} = 0$, sauf e_0 qui est déterminé par la relation

$$0 = e_0 + e_2 + \ldots + e_q + \ldots.$$

En négligeant les termes en $M'' a^{-1-q}$ à partir de $q = 4$, les équations relatives à e_2 et $e_2^{(2)}$ sont semblables à l'équation (137) de la théorie de Clairaut qui peut se mettre sous la forme

$$t^{-1}\frac{d\Phi}{dt}\left(2a + t\frac{da}{dt}\right) + 4\pi i\int_t^{t_1} \rho\, da = -\frac{5}{2}.$$

L'analogie nous apprend, grâce à la discussion approfondie de l'équation (137) faite au Chapitre VI, que l'on a, pour toute valeur de t,

$$e_2 \geqq 0, \qquad e_2^{(2)} \geqq 0, \qquad -\frac{de_2^{(2)}}{dt} \geqq 0, \qquad -\frac{de_2}{dt} \geqq 0.$$

La déformation e peut s'écrire ensuite, comme on le vérifie aisément,

$$e = A(t)\, s^2\alpha' + B(t)\, s^2\alpha' c\, 2\psi',$$

et les coefficients A et B satisfont aux relations

$$A \leqq 0, \qquad B \leqq 0, \qquad \frac{dA}{dt} \leqq 0, \qquad \frac{dB}{dt} \leqq 0.$$

Les surfaces d'égale densité sont des ellipsoïdes à trois axes inégaux. Ils sont allongés dans la direction de l'étoile sœur en même temps qu'aplatis dans la direction indiquée par le vecteur vitesse angulaire.

Ces deux déformations diminuent constamment de la surface au centre.

Si la masse de l'étoile jumelle est beaucoup plus grande que celle de l'astre envisagé, l'allongement dans la direction de cette étoile surpasse l'aplatissement dans le sens du vecteur $\vec{\omega}$. Enfin, si les densités ρ'' sont très grandes par rapport aux densités ρ', l'identification de la seconde

étoile avec une sphère ou avec un point peut se poursuivre au travers des approximations suivantes. Il en est certainement ainsi pour les étoiles doubles composées d'un astre principal et d'un compagnon très petit et très dense : compagnon de Sirius, de Procyon, etc.

Mentionnons enfin que Laplace a déjà montré que la Lune, considérée comme astre jumeau de la Terre, doit être en théorie un ellipsoïde à trois axes.

En supposant, d'autre part, les fluides homogènes, on doit retrouver, par cette méthode, les figures de Darwin.

CHAPITRE X.

APPLICATIONS AUX ROTATIONS PERMANENTES DE GENRE UN.

87. **La condition nécessaire et suffisante.** — Le procédé uniforme s'applique sans difficulté théorique nouvelle au cas où le fluide n'est plus en état d'équilibre relatif, pourvu qu'il soit animé d'une rotation du premier genre.

Nous pourrons être brefs dans cet exposé et ne signaler que les différences essentielles que la variation de la vitesse angulaire introduit; d'autant plus que, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, nous avons exposé le procédé uniforme précisément pour ces rotations-là (t. LVII, 1929, p. 222).

La vitesse angulaire ω d'une particule ne dépend que de la distance l à l'axe de rotation. Le potentiel de la force centrifuge s'écrit

$$Q(l^2) = \frac{1}{2}\int_0^{l^2} \omega^2(l^2)\, dl^2.$$

Nous supposerons que la fonction $\omega^2(l^2)$ est continue et admet une dérivée première continue $\frac{d\omega^2}{dl^2}$. L'équation à résoudre s'écrit toujours de la même manière :

$$\Phi(\rho) = U + Q(l^2),$$

où Φ est le potentiel du champ de la pesanteur, ρ la densité et U le potentiel newtonien. Les transformations du Chapitre IV s'appliquent au cas actuel, mais le laplacien de Q, qui était égal à $2\omega^2$ pour l'équilibre relatif, n'est plus constant et ne peut plus être placé en facteur devant l'intégrale étendue à la cavité. Il reste sous le signe somme. Soient comme au Chapitre IV : S une surface à Φ constant, g la pesanteur, i la constante de l'attraction, Z la zone comprise entre S et la surface libre, M la masse totale, C la cavité intérieure à S, et enfin r la distance de deux points.

L'équation de Poincaré transformée s'écrit

$$\frac{1}{4\pi}\int g\, dS + i\int \rho\, dZ = iM - \frac{1}{4\pi}\int \Delta Q\, dC,$$

et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait rotation de genre un devient

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{g}{r}\,dS + i\int \frac{\rho}{r}\,dZ = \Phi - Q - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta Q}{r}\,dC.$$

Cette dernière doit être satisfaite quelle que soit la position du point potentié à l'intérieur de la cavité.

Les deux membres sont harmoniques dans C, comme on le vérifie facilement, ils sont analytiques et il suffira de nouveau d'identifier leur développement de Taylor au voisinage du centre.

Il n'y a aucune difficulté théorique nouvelle, mais il se présente une difficulté pratique dans le calcul de l'intégrale

$$\int \frac{1}{r}\Delta Q\,dC.$$

La vitesse angulaire est supposée connue et la cavité peut être supposée sphérique. C'est le potentiel d'une sphère hétérogène qu'il s'agit de calculer, les couches d'égale densité étant cylindriques.

88. **Sur une loi spéciale de variation de ω.** — Envisageons un cas particulier, celui où la vitesse angulaire est une expression linéaire de l^2, avec deux coefficients constants et petits ω_1^2 et ω_2^2 :

$$\omega^2(l^2) = \omega_1^2 + \omega_2^2\, l^2.$$

Ce cas a été approfondi par M^lle^ N. Danoz. Les équations deviennent

$$\frac{1}{4\pi}\int g\,dS + i\int \rho\,dZ = iM - \frac{i\omega_1^2}{2\pi}\int dC - \frac{\omega_2^2}{\pi}\int l^2\,dC, \tag{235}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{g}{r}\,dS + i\int \frac{\rho}{r}\,dZ = \Phi - \frac{\omega_1^2}{2}\left(l^2 + \frac{1}{\pi}\int \frac{1}{r}\,dC\right) - \omega_2^2\left(\frac{l^4}{4} + \frac{1}{\pi}\int \frac{l^2}{r}\,dC\right). \tag{236}$$

La dernière intégrale du second membre de (236) représente un potentiel d'une sphère hétérogène, la densité variant comme le carré de la distance à un diamètre. Φ étant mis à part, c'est la seule expression des seconds membres dont le calcul offre de la difficulté.

Mais remarquons que toute expression de la forme

$$A = f(l) + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\Delta f(l)\,dC$$

est harmonique à l'intérieur de la sphère C et si f ne dépend que de la

distance l à un diamètre, alors cette fonction ne dépend que du rayon vecteur τ et de l'angle θ que fait ce rayon avec le diamètre $l = 0$. On peut écrire

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \tau^n X_n(c\theta), \tag{237}$$

les coefficients sont des constantes pour une même sphère C, ils dépendront de son rayon t si ce dernier est conçu comme une variable.

Or, cette fonction A sera entièrement déterminée par ses valeurs sur l'axe $\theta = 0$ qui correspond à $l = 0$ (§ 12, p. 17). Dans le cas actuel, on a

$$A = \frac{l^4}{4} + \frac{1}{\pi}\int \frac{l^2}{r}\, dC$$

et pour $l = 0$, A se réduit au potentiel de la sphère hétérogène chargée d'une densité l^2 à calculer sur l'axe $l = 0$. Le calcul pratique n'offre pas de grande difficulté, en vertu de la symétrie de la distribution et donne, pour $\theta = 0$,

$$A = 2\left(\frac{t^4}{3} - \frac{2}{15} t^2\tau^2 + \frac{1}{35}\tau^4\right).$$

Identifiant ce développement particulier avec le développement général (237) pour $\theta = 0$, on trouve

$$b_0 = \frac{2}{3} t^4, \qquad b_2 = -\frac{4}{15} t^2, \qquad b_4 = \frac{2}{35},$$

et les autres coefficients sont identiquement nuls. Alors, pour tout point τ, θ intérieur à la sphère

$$\frac{l^4}{4} + \frac{1}{\pi}\int \frac{l^2}{r}\, dC = \frac{2}{3} t^4 X_0 - \frac{4}{15} t^2\tau^2 X_2(c\theta) + \frac{2}{35}\tau^4 X_4(c\theta).$$

Pour obtenir le potentiel de la sphère elle-même, il suffirait de soustraire l'expression $\frac{1}{4} l^4$, mais ce n'est pas ce qui nous intéresse ici.

89. **Le tableau fondamental et sa résolution.** — Nous développons de nouveau l'inverse de la distance en série

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\tau^q}{R^q} X_q(c\gamma).$$

Les équations (235) et (236) donnent, après identification en τ :

$$\frac{1}{4\pi}\int X_q \frac{g\,dS}{R^{q+1}} + i\int X_q \frac{\rho\,dZ}{R^{q+1}} = \begin{cases} iM - \frac{2}{3}\omega_1^2 t^3 - \frac{8}{15}\omega_2^2 t^5 & \text{si } q=-1, \\ \Phi - \omega_1^2 t^2 - \frac{2}{3}\omega_2^2 t^4 & \text{si } q=0, \\ \frac{1}{3}\omega_1^2 X_2(c\theta) + \frac{4}{15}\omega_2^2 t^2 X_2(c\theta) & \text{si } q=2, \\ -\frac{2}{35}\omega_2^2 X_4(c\theta) & \text{si } q=4, \\ 0 & \text{si } q=1,\ 3,\ 5,\ 6,\ \ldots, \end{cases}$$

au lieu du tableau (99), page 75. Posons de nouveau $R = t(1+e)$, puis

$$e = \omega_1^2 e^{(1)} + \omega_2^2 e^{(2)}, \qquad \Phi = \Phi^0 + \omega_1^2 \Phi^{(1)} + \omega_2^2 \Phi^{(2)}.$$

Identifions en ω_1 et ω_2, ainsi d'ailleurs qu'en θ et t.

1° L'identification des termes indépendants de ω_1 et ω_2 fournit la stratification sphérique et donne, comme précédemment,

$$\frac{d\Phi^0}{dt} = -\frac{4}{3}\pi i D\, t,$$

D étant la densité moyenne de la manière intérieure à la sphère de rayon t.

2° L'identification des termes en ω_1 fournit un système identique à celui de la première approximation pour l'équilibre relatif, tableau (124), et l'on retrouve la déformation

$$e^{(1)} = a(t)\, s^2\theta.$$

3° L'identification des termes en ω_2 donne le système suivant :

$$\{e_q^{(2)}\} = \frac{2q+1}{4\pi i}\begin{cases} -\frac{d\Phi^{(2)}}{dt}t^2 + \frac{8}{15}t^5 & \text{si } q=-1, \\ -\frac{d\Phi^{(2)}}{dt}t - \Phi^{(2)} + \frac{2}{3}t^4 & \text{si } q=0, \\ -\frac{4}{15}t^2 & \text{si } q=2, \\ \frac{2}{35} & \text{si } q=4, \\ 0 & \text{si } q=1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots. \end{cases}$$

Pour tout autre coefficient que $e_0^{(2)}$, $e_2^{(2)}$ et $e_4^{(2)}$ l'équation à résoudre se réduit à $\{e\} = 0$, du paragraphe 57. On sait qu'elle n'admet pas d'autre

solution que $e \equiv 0$. La déformation $e^{(2)}$ est donc

$$e^{(2)} = e_0^{(2)} X_0 + e_2^{(2)} X_2(c\theta) + e_4^{(2)} X_4(c\theta).$$

La déformation totale s'écrit enfin, en posant $\tau = \frac{t}{t_1}$,

$$e = m(\tau)\, s^2\theta - n(\tau)\, s^2\theta\, c^2\theta$$

pour toute valeur de τ et pour $\tau \geq 1$, l'on a

$$m(\tau) = \Lambda_1(\tau^3 + u\tau^{-2}) - \Lambda_2 w\tau^{-4},$$

$$n(\tau) = \Lambda_2\left(\frac{1}{2}\tau^5 + 7w\tau^{-4}\right);$$

u et w sont deux constantes stokiennes, ainsi que les suivantes :

$$\Lambda_1 = \frac{\omega_1^2 t_1^3}{2iM}, \qquad \Lambda_2 = \frac{\omega_2^2 t_1^5}{2iM}.$$

On a, d'ailleurs, la durée de la révolution T étant exprimée dans un système d'unité quelconque

$$\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} = (T_{\text{pôle}} - T_{\text{équa}})\frac{T_{\text{pôle}} + T_{\text{équa}}}{T_{\text{équa}}^2}.$$

Le potentiel Φ, la pesanteur sur l'axe polaire et le potentiel newtonien s'écrivent à l'extérieur de l'astre :

$$\Phi(\tau) = \frac{iM}{t_1}\left(\tau^{-1} - \frac{2}{3}\Lambda_1 u\tau^{-3} + \frac{8}{5}\Lambda_2 w\tau^{-5}\right),$$

$$U(R, \theta) = \frac{iM}{R}\left[1 - \frac{2}{3}\Lambda_1 u\left(\frac{t_1}{R}\right)^2 X_2(c\theta) + \frac{8}{5}\Lambda_2 w\left(\frac{t_1}{R}\right)^4 X_4(c\theta)\right],$$

$$g(\tau) = \frac{iM}{t_1^2}(\tau^{-2} - 2\Lambda_1 u\tau^{-4} + 8\Lambda_2 w\tau^{-6}).$$

La constante u est, comme dans l'équilibre relatif, comprise entre 0 et $\frac{3}{2}$.

90. **Ellipsoïde tangent et correction.** — L'approximation faite est d'ordre un. On doit négliger les termes d'ordre quatre en ω_1 et ω_2. Alors l'ellipsoïde tangent au pôle et à l'équateur, à la surface de paramètre τ, est

$$e = m(\tau)\, s^2\theta.$$

La correction rapportée au rayon polaire n'est autre que

$$c = n(\tau)\, c^2\theta\, s^2\theta.$$

Mettons en évidence le coefficient Λ_2,

$$c = \Lambda_2 \, \mathrm{E}(\tau) \, s^2\theta \, c^2\theta ;$$

$\mathrm{E}(\tau)$ est, à l'extérieur de l'astre,

$$\mathrm{E}(\tau) = \frac{1}{2}\tau^5 + 7\varpi\tau^{-4}.$$

Pour toute valeur de τ, $\mathrm{E}(\tau)$ doit satisfaire à

$$4\mathrm{E} + \tau\mathrm{E}' = \frac{3\tau^2}{\mathrm{D}} \int_\tau^1 \rho \, d(\mathrm{E}\tau^{-2}) + \frac{27}{70\pi i}\frac{\tau^2}{\mathrm{D}}.$$

Or, cette relation est identique à celle (182) du paragraphe 72, en posant $\mathrm{F} = \frac{27}{70\pi i}\frac{\tau^2}{\mathrm{D}}$. La fonction F décroît avec τ. Le raisonnement du paragraphe 72 s'applique et donne $\mathrm{E}_1 \geqq 0$, $\mathrm{E}'_1 \geqq 0$.
On en déduit les relations

$$-4 \leqq 56\varpi \leqq 5.$$

Enfin, si l'on prenait la loi de variation des vitesses angulaires

$$\omega^2(l^2) = \omega_1^2 - \omega_2^2 l^2,$$

les calculs précédents restent valables, mais il faut remplacer partout

$$\omega_2^2 \text{ par } -\omega_2^2 \quad \text{et} \quad \Lambda_2 \text{ par } -\Lambda_2.$$

M^lle^ Danoz a pu conclure ainsi : *Dans tout mouvement de genre un, où la vitesse angulaire est donnée par la relation suivante :*

$$\omega^2(l^2) = \omega_1^2 \pm \omega_2^2 l^2,$$

la surface libre est un ellipsoïde déprimé entre le pôle et l'équateur si ce dernier tourne le plus vite, c'est un ellipsoïde dilaté si l'équateur tourne plus lentement que les calottes polaires. Cette correction diminue de la surface libre aux surfaces d'égale densité voisines. Ce résultat est relatif à la première approximation.

91. **Le cas du Soleil.** — L'équateur solaire fait un tour en 25 jours et les calottes polaires en 28 au moins; nous prendrons 28. Le rapport des deux Λ est donc d'environ $\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} = \frac{1}{4}$, et nous avons d'autre part

$$\Lambda_1 = \frac{1}{120000}.$$

Le rapport provenant du mouvement zonal $\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}$ est donc 30000 fois supé-

rieur à A_1 qui est lui-même le rapport des termes de seconde approximation à ceux de première. Les effets du mouvement zonal sont donc pour le Soleil 30000 fois plus importants, au moins, que ceux des termes en la quatrième puissance de la vitesse angulaire.

L'aplatissement $m(1)$ est compris entre les limites suivantes

$$\frac{1}{120000} \leqq m(1) \leqq \frac{2,5}{120000},$$

et la correction rapportée aux rayons polaires est à 45° de latitude comprise entre les limites

$$0 \leqq n(1) \leqq \frac{0,28}{120000}.$$

Le rayon polaire étant de 6955500^{km} environ, la différence des rayons équatoriaux et polaires ne dépasserait pas $14^{km},5$ et la correction à 45° est inférieure à $1^{km},65$.

Ceci soit dit, abstraction faite de toute considération thermique, des taches, des protubérances, etc.

Le potentiel à l'extérieur s'écrit

$$U = \frac{fM}{R}\left[1 - \frac{1}{120000}\frac{2}{3}u\left(\frac{t_1}{R}\right)^2 X_2(c\theta) + \frac{1}{120000}\frac{2}{5}w\left(\frac{t_1}{R}\right)^4 X_4(c\theta)\right].$$

Théoriquement les coefficients u et w devraient pouvoir se calculer à partir du mouvement des planètes et en particulier de l'avance du périhélie de Mercure. Mais ces termes sont extrêmement faibles, même le premier en u, car le rapport $\frac{t_1}{R}$ est petit pour Mercure, l'aplatissement solaire ne suffit pas à expliquer l'anomalie. On sait qu'au contraire la gravifique d'Einstein y parvient.

CHAPITRE XI.

REMARQUES AU SUJET DES MOUVEMENTS GÉNÉRAUX ET DE LA STABILITÉ.

92. **Objet du Chapitre et notations.** — Le phénomène de la variation des latitudes, les marées terrestres et océaniques, la précession des équinoxes appellent une étude approfondie des mouvements d'un fluide dans un champ newtonien qui ne se réduisent pas à de simples rotations.

Dans la théorie classique du mouvement de précession, la terre est assimilée à un corps solide, et ce sont les équations d'Euler qu'on lui applique. Mais s'il s'agit de tenir compte de la fluidité du globe et des déformations qu'il est susceptible d'éprouver, il faut prendre quelques précautions. En effet, on ne peut plus, dans ce cas, parler en toute rigueur d'un axe de rotation.

Dans le but de préparer une étude plus générale, nous envisagerons différents trièdres de référence attachés au fluide et se mouvant avec lui. Ils devront être solidaires de ce dernier s'il y a équilibre relatif, ils serviront à repérer les déformations si le fluide en subit au contraire. La rotation de ce trièdre pourra être regardée comme une rotation moyenne de l'astre lui-même. Nous formulerons les équations d'Euler pour le fluide ainsi que l'équation des forces vives. Celle-ci conduit, on le sait, aux questions de stabilité. Nous n'avons pas cherché à être complet, au contraire, nous avons évité tout ce qui pourrait faire double emploi avec le quatrième tome du *Traité de Mécanique rationnelle* d'Appell qui traite en particulier de la stabilité.

Notations. — Dans la suite, h est un indice qui prend les valeurs 1, 2, et 3 ; h, h', h'' trois indices se suivant dans l'ordre circulaire 1, 2, 3. Un trièdre trirectangle sera représenté par X_h. Les moments d'inertie et produits d'inertie donnent lieu aux équations

$$A_h = \Sigma m(X_{h'}^2 + X_{h''}^2), \qquad B_h = \Sigma m X_{h'} X_{h''}.$$

La lettre a affectera ce qui a trait au mouvement absolu et la lettre r au mouvement relatif par rapport aux axes entraînés X_h. Une paren-

thèse désigne un produit intérieur ou scalaire

$$(P, Q) = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3.$$

Un crochet représente un produit extérieur ou vectoriel

$$[P, Q]_h = P_{h'} Q_{h''} - P_{h''} Q_{h'}.$$

Dans les équations à signification géométrique, les projections seront toujours faites sur les axes mobiles. Pour simplifier, nous appellerons « moment cinétique » le vecteur somme des moments des quantités de mouvement.

Maintenant, si P_h représente les projections sur les axes X'_h de la rotation instantanée du trièdre mobile, on a en général

$$G^a_h = A_h P_h - B_{h'} P_{h''} - B_{h''} P_{h'} + G^r_h. \tag{238}$$

L'énergie cinétique T^a s'écrit

$$T^a = T' + T^r + (P, G^r); \tag{238'}$$

en posant ceci

$$2T' = A_1 P_1^2 + A_2 P_2^2 + A_3 P_3^2 - 2B_1 P_2 P_3 - 2B_2 P_3 P_1 - 2B_3 P_1 P_2.$$

93. **Axes liés à un fluide.** — Envisageons un fluide animé d'un mouvement quelconque et appelons « axes liés au fluide » un trièdre trirectangle tel que si le fluide est en équilibre relatif, il n'ait aucun mouvement par rapport à ce trièdre.

Deux systèmes d'axe s'imposent tout d'abord à l'attention :

1° Les axes Z_h de l'ellipsoïde central d'inertie. Ils sont définis par les relations

$$\Sigma m Z_h = 0, \tag{239}$$

$$\Sigma m Z_{h'} Z_{h''} = 0. \tag{240}$$

Si le fluide est en état d'équilibre relatif, il se meut à la manière d'un solide et les axes Z_h sont bien solidaires de ce solide.

2° Les axes Z'_h ayant le centre de gravité comme origine et se mouvant de telle manière que le moment cinétique du fluide, dans son déplacement relatif par rapport au trièdre Z'_h, soit constamment nul, $G^r = 0$. Ces axes sont définis par les équations

$$\Sigma m Z'_h = 0, \tag{241}$$

$$\Sigma m Z'_{h'} \frac{dZ'_{h''}}{dt} - \Sigma m Z'_{h''} \frac{dZ'_{h'}}{dt} = 0. \tag{242}$$

Actuellement,

$$T^a = T' + T^r, \tag{243}$$

$$G_h^a = A_h P_h - B_{h'} P_{h''} - B_{h''} P_{h'}. \tag{244}$$

Considérons alors un solide qui serait constitué par les particules du fluide telles qu'elles sont à l'instant t et qui serait animé de la rotation P ; il a même moment cinétique que le fluide. Ce solide est celui que Poincaré appelle « solide équivalent ». Il est relatif à un instant, n'existe plus à l'instant suivant où il est remplacé par un autre, puisque la masse s'est déformée entre temps.

3° Envisageons un système Z_h'' plus général que le précédent, où l'on aurait simplement

$$(P, G^r) = 0.$$

L'énergie cinétique revêtirait encore la forme simple

$$T^a = T' + T^r.$$

Mais dans les expressions (238) du moment cinétique, les G_h^r ne seraient plus forcément nuls. Il y a encore une infinité de manières de faire en sorte que ces axes Z_h'' soient liés au fluide dans le sens précisé au début.

4° Enfin, avec M. Le Roux, on peut définir des axes liés tels que T^r soit minimum.

Remarque. — Afin d'éviter de fâcheuses confusions, il est bon de remarquer que les deux premiers trièdres ne coïncident pas forcément. En effet, la condition (240) donne, par dérivation et pour $h = 3$,

$$\Sigma m Z_1 \frac{dZ_2}{dt} + \Sigma m Z_2 \frac{dZ_1}{dt} = 0, \tag{245}$$

tandis que la condition relative au moment cinétique s'écrit

$$\Sigma m Z_1' \frac{dZ_2'}{dt} - \Sigma m Z_2' \frac{dZ_1'}{dt} = 0. \tag{246}$$

Si les axes que l'on se propose de définir, Z_1 et Z_1' d'une part, Z_2 et Z_2' d'autre part, coïncidaient constamment, les quatre sommes Σ précédentes devraient être nulles. Or, voici un système matériel où elles ne sont certainement pas toutes nulles.

Deux barres homogènes, de même densité, de longueurs inégales, se coupent en leur milieu et tournent en sens inverse dans le plan $Z_1 Z_2$ qui est fixe. Au moment où ces deux barres sont à angle droit, elles coïncident avec les axes Z_1, Z_2 qui sont bien déterminés. Les deux barres se rapprochant de la bissectrice du premier quadrant $Z_1 O Z_2$, les sommes

de (245) sont toutes deux positives si l'équation (246) est satisfaite et si l'on a $Z_1 \equiv Z'_1$ et $Z_2 \equiv Z'_2$.

94. **Déformation et stabilité.** — La notion commune de stabilité consiste en ceci : au voisinage d'une position d'équilibre stable, un petit ébranlement initial ne crée pas de grands effets, tandis que si l'équilibre était instable, il pourrait entraîner des effets disproportionnés avec la cause, et en particulier une catastrophe.

Si le système matériel envisagé ne possède qu'un nombre fini de degrés de liberté, cette notion de stabilité est susceptible de beaucoup de précisions; elle conduit à la définition classique, celle qui intervient dans le théorème de Lejeune-Dirichlet.

Mais s'il y a une infinité de coordonnées, comme dans un fluide, les mots « voisinage », « petit ébranlement » n'ont plus un sens aussi précis et la notion de stabilité en devient beaucoup plus délicate. D'ailleurs, de l'avis des meilleurs auteurs, les questions qui s'y rapportent sont loin d'être complètement élucidées.

L'usage du point représentatif du système dans l'espace à k dimensions pour un système à k degrés de liberté conduirait normalement à la représentation dans un espace à une infinité de dimensions des systèmes dépendant d'une infinité dénombrable de coordonnées. Des difficultés surgissent, car la notion de distance et de voisinage dans cet espace est susceptible de plusieurs définitions différentes qui s'imposent toutes plus ou moins suivant que la fonction de force dépend uniformément ou non des différents paramètres. Il serait trop long de retracer ici ce genre de difficultés, bien connu d'ailleurs dans le calcul fonctionnel, et je préfère donner une définition de la déformation d'un fluide et du voisinage de deux configurations, qui soit indépendante des coordonnées du système, sans vouloir les imposer, d'ailleurs, car je conçois très bien que le lecteur puisse préférer d'autres définitions.

Soient dm une portion de la matière et E le volume de la région de l'espace que cet élément balaie au cours du temps. Une région où la masse dm reviendrait serait comptée autant de fois. J'appellerai « mesure du déplacement de la masse fluide » l'intégrale suivante étendue à toutes les particules

$$\int \mathrm{E}\, dm.$$

Considérons maintenant deux configurations du fluide, j'appelle « déformation » la borne inférieure des mesures des déplacements virtuels qui font passer de l'une à l'autre des deux configurations. La défor-

mation pourra également s'appeler « distance des deux configurations ». Elle satisfait aux axiomes de la distance dans les ensembles abstraits.

Si le mouvement du fluide est périodique, la mesure du déplacement peut croître au delà de toute limite, mais la déformation atteint son maximum durant la première période et ne le dépasse jamais dans la suite. La force vive totale du système joue un rôle différent, elle peut rester petite, bien qu'au cours du temps la déformation puisse devenir considérable.

Ceci étant, nous dirons qu'un état d'équilibre est stable si, étant donné un nombre η arbitrairement petit, on peut déterminer un autre nombre ε tel qu'une position initiale quelconque à distance inférieure à ε de la configuration d'équilibre et une énergie cinétique initiale également inferieure à ε, ne créent à l'avenir que des configurations à distance inférieure à η de la configuration d'équilibre.

S'il s'agit d'équilibre relatif, les déformations et l'énergie cinétique se mesureront naturellement à des axes liés au fluide.

Il y aura stabilité s'il existe un trièdre lié tel que le critère précédent s'applique à ces axes-là. Pour rendre rigoureuse la démonstration qui généralise celle de Lejeune-Dirichlet, il suffit de préciser la notion de maximum de certaines fonctionnelles.

Nous appellerons « sphère de rayon r » centrée en e, l'ensemble des configurations à distance r de la configuration e.

Une fonctionnelle $\mathrm{F}|c|$ des configurations c sera continue en un état e s'il existe une fonction $\varepsilon(r)$ tendant vers zéro avec r telle que l'on ait

$$\big|\mathrm{F}|c| - \mathrm{F}|e|\big| < \varepsilon(r)$$

pour toute configuration c à distance r de e.

Une fonctionnelle $\mathrm{F}|c|$ continue sera *maximum au sens faible* en e s'il existe une sphère de rayon r donnant lieu à l'inégalité

$$\mathrm{F}|e| > \mathrm{F}|c|$$

quel que soit l'état c à l'intérieur de cette sphère et différent de e.

Une fonctionnelle $\mathrm{F}|c|$ continue sera *maximum au sens fort* si sur toute sphère de rayon suffisamment petit r, on a

$$\mathrm{F}|e| - \mathrm{F}|c| > k^2(r),$$

$k^2(r)$ étant une fonction positive qui naturellement tend vers zéro avec r.

Le sens fort ne dérive pas du sens faible comme pour les fonctions

d'un nombre fini de variables, car l'ensemble des configurations n'est pas nécessairement compact au sens de M. Fréchet. Encore ici, nous n'insistons par sur ce genre de difficultés bien connues en calcul fonctionnel.

95. **Un critère général de stabilité.** — Nous supposons que les forces dissipatives, c'est-à-dire celles qui proviennent de la viscosité, créent un travail élémentaire dh. Ensuite nous admettrons que l'on puisse poser

$$T^r = h + V.$$

T^r est l'énergie cinétique relative à un système d'axes liés au fluide et V une fonctionnelle ne dépendant que de la configuration du système. S'il y a viscosité, la fonction h ne peut que décroître ou rester constante. Pour une configuration initiale c_0 on aura

$$T_0^r = h_0 + V_0.$$

La différence peut s'écrire

$$T^r = T_0^r + h - h_0 + V - V_e + V_e - V_0. \tag{247}$$

Supposons que la fonctionnelle V *soit maximum au sens fort en e. Alors l'équilibre sera stable en e.* Il est possible en effet de déterminer une sphère s centrée en e telle que sur celle-ci on ait

$$V - V_e < -k^2,$$

k^2 étant un nombre arbitrairement petit. Et l'on peut prendre une nouvelle sphère telle que l'on ait en tout point intérieur $V_e - V_0 < \frac{1}{2} k^2$ et une force vive initiale $T_0^r < \frac{1}{2} k^2$.

Dans ces circonstances, l'équation (247) donnerait $T^r < 0$ sur la sphère s, ce qui est absurde. La sphère s n'est pas atteinte et la force vive reste elle-même inférieure à k^2.

L'hypothèse que la fonctionnelle soit maximum au sens faible permettrait de démontrer que la force vive relative restera extrêmement petite à la suite de l'ébranlement initial, mais elle ne permettrait pas de démontrer d'une manière générale que les configurations restent à distance faible de l'état d'équilibre.

Poincaré a introduit une réciproque en quelque sorte qui s'interprète ainsi, dans le langage actuel.

Supposons que V puisse prendre au voisinage de e des valeurs supérieures à V_e. Il existerait un état initial c_0 pour lequel

$$V_0 > V_e + 2k^2,$$

k^2 étant suffisamment petit, et l'on pourrait prendre $T_0^r < k^2$ de sorte que

$$V_0 - T_0^r > V_e + k^2,$$

mais on a, d'autre part,

$$V - T^r = -h.$$

Au cours du mouvement $-h$ ne peut décroître et, à partir de l'instant initial, on peut écrire

$$V - T^r = -h \geq -h_0 = V_0 - T_0^r > V_e + k^2.$$

La configuration ne saurait se rapprocher de e puisque l'on a

$$V > V_e + k^2.$$

Il existe donc une sphère centrée en e assez petite dans laquelle la configuration n'entre plus.

S'il y a dissipativité, le rayon de cette sphère, dans laquelle on est certain que la configuration n'entre plus, peut croître au cours du temps. Ainsi, la dissipativité peut rendre instable un équilibre qui, sans elle, pourrait être stable, comme Lord Kelvin l'a remarqué.

96. **Un théorème récent d'Appell.** — Poincaré et Liapounoff ont démontré qu'une masse fluide homogène et isolée ne peut atteindre un état d'équilibre relatif que si elle est animée d'une rotation autour d'un axe de direction fixe. Dans un article aux *Acta mathematica* en 1926, Appell a généralisé ce théorème au cas où la densité ne dépendrait que de la pression, la masse fluide pouvant d'autre part être soumise à l'attraction newtonienne d'autres corps fixes ou variables.

Ce dernier théorème se démontre aisément. Soient X_h les axes liés au fluide. Un accent ($'$) représentera une dérivation par rapport au temps. Les expressions de la vitesse sont

$$V_h = [P, X]_h + X'_h$$

en projection sur les axes mobiles et celles de l'accélération sont

$$\Gamma_h = \big[P, [P, X]\big]_h + [P', X]_h + 2[P, X']_h + X''_h.$$

Soient U_1 le potentiel newtonien des attractions des particules du fluide et U_2 le potentiel des attractions des corps extérieurs. S'il y a équilibre relatif, on peut écrire, en se référant au système mobile X_h, ρ étant la densité et p la pression,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X_h} = \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial X_h} - \Gamma_h.$$

Les potentiels U peuvent d'ailleurs dépendre du temps. En posant d'autre part, puisque la densité ne dépend que de la pression,

$$\Phi = \int \frac{dp}{\rho} \qquad \text{et} \qquad A = U_1 + U_2 - \Phi,$$

les accélérations devront dériver du potentiel V. Dans l'état d'équilibre relatif, on a

$$X'_h = X''_h = 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_h = \frac{\partial A}{\partial X_h}.$$

Mais les dérivées de Γ s'écrivent

$$\frac{\partial \Gamma_h}{\partial X_{h'}} = P_h P_{h'} - P'_{h''}, \qquad \frac{\partial \Gamma_{h'}}{\partial X_h} = P_h P_{h'} + P'_{h''}$$

et puisqu'il faut qu'elles soient égales on en conclut $P'_{h''} = 0$; la rotation instantanée est fixe par rapport au système mobile, elle ne peut être que de direction fixe dans l'espace et de grandeur constante; le théorème est démontré.

Les résultats du Chapitre II permettraient d'être plus bref. En effet, s'il existe une relation de la forme $\rho = f(p)$, alors le mouvement est de genre un et il doit exister un potentiel des accélérations, ce qui exige $P'_h \equiv 0$.

Dans son beau mémoire, Appell étudie également le cas où la densité ne dépend pas de la seule pression.

97. **Équations de l'énergie et des moments dans un système d'axes quelconques.** — Nous supposons, pour simplifier, le centre de gravité du fluide immobile et le prenons comme origine d'un système d'axes entraînés X_h quelconques.

Soient en plus A le vecteur, moment résultant des forces extérieures, W l'énergie potentielle des forces internes non dissipatives et dh la somme des travaux élémentaires des forces dissipatives, c'est-à-dire des forces de frottement résultant de la viscosité, ce travail est toujours négatif ou nul.

Posons

$$T' = \frac{1}{2}(P, G^s), \tag{248}$$

$$G^s_h = A_h P_h - B_{h'} P_{h''} - B_{h''} P_{h'}. \tag{249}$$

Le moment cinétique se calcule facilement et s'écrit actuellement

$$G^a_h = G^s_h + G^r_h. \tag{250}$$

Le théorème des moments donne

$$\frac{dG^a_h}{dt} + [P, G^a]_h = A_h; \tag{251}$$

ces équations sont analogues à celles d'Euler pour le mouvement d'un solide.

Le théorème des forces vives s'écrit d'autre part

$$d\mathrm{T}^a = d\mathrm{W} + (\Lambda, \mathrm{P})\,dt + dh. \tag{252}$$

Mais on a, comme précédemment,

$$\mathrm{T}^a = \mathrm{T}^r + \mathrm{T}' + (\mathrm{P}, \mathrm{G}^r) \tag{253}$$

et l'équation des forces vives devient, par substitution,

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{T}^r + \mathrm{T}' + (\mathrm{P}, \mathrm{G}^r) - \mathrm{W}] = (\Lambda, \mathrm{P}) + \frac{dh}{dt} \tag{254}$$

ou encore, en vertu de (248) et de (250), en éliminant $(\mathrm{P}, \mathrm{G}^r)$,

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{T}^r - \mathrm{T}' - \mathrm{W} + (\mathrm{P}, \mathrm{G}^a)] = (\Lambda, \mathrm{P}) + \frac{dh}{dt}.$$

et par suite, en dérivant le produit intérieur,

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T}^r - \mathrm{T}' - \mathrm{W}) + \left(\frac{d\mathrm{P}}{dt}, \mathrm{G}^a\right) + \left(\mathrm{P}, \frac{d\mathrm{G}^a}{dt}\right) = (\Lambda, \mathrm{P}) + \frac{dh}{dt}.$$

Mais l'équation des moments (251) donne

$$\left(\mathrm{P}, \frac{d\mathrm{G}^a}{dt}\right) = (\Lambda, \mathrm{P}).$$

Ainsi les moments Λ disparaissent de l'équation de l'énergie qui s'écrit

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T}^r - \mathrm{W} - \mathrm{T}') = \frac{dh}{dt} - \left(\mathrm{G}^a, \frac{d\mathrm{P}}{dt}\right). \tag{255}$$

Cette relation est très générale, puisque le système de référence est resté d'orientation quelconque, fixe ou variable.

Si, maintenant, on adopte le système des axes Z_h'' définis par

$$(\mathrm{P}, \mathrm{G}^r) = 0,$$

l'équation (254) s'écrit

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T}^r + \mathrm{T}' - \mathrm{W}) = (\Lambda, \mathrm{P}) + \frac{dh}{dt}; \tag{256}$$

cette dernière sera utile, notamment s'il n'y a pas de forces extérieures ou si, simplement, le moment Λ est nul.

98. Les critères de stabilité de Lord Kelvin et de Poincaré. — Recherchons les états d'équilibre relatif qui puissent être stables. Nous savons que la rotation instantanée est dans ce cas de direction fixe et nous pourrons la prendre comme axe des X_3.

1° Supposons que le vecteur P soit constant en grandeur et posons $P_3 = \omega = \text{const.}$, tandis que l'on a $P_1 = P_2 = 0$. Alors l'équation (255) donne

$$T' = h + W + T'$$

avec

$$T' = \frac{1}{2}\omega^2 I,$$

où I est le moment d'inertie de la masse fluide par rapport à l'axe X_3. En définitive, l'énergie cinétique relative peut s'écrire

$$T' = h + W + \frac{1}{2}\omega^2 I.$$

La fonctionnelle V envisagée précédemment, paragraphe 95, se réduit ici à

$$W + \frac{1}{2}\omega^2 I.$$

W est l'énergie potentielle des attractions newtoniennes des particules du fluide entre elles. Cette fonctionnelle ne dépend que de la configuration du système. Si elle est maximum au sens fort pour une configuration, cette dernière représente un état stable d'équilibre relatif. Dans l'étude des variations de cette fonctionnelle avec les configurations, la quantité ω doit être considérée comme une constante. *C'est le critère de Lord Kelvin.*

2° S'il n'y a pas de forces extérieures ou si $A = 0$, le vecteur G est constant en grandeur et direction. Dans l'état d'équilibre, il ne peut que coïncider en direction avec le vecteur P. Actuellement P peut varier en grandeur, mais on a toujours

$$G = IP \qquad \text{et} \qquad T' = \frac{1}{2}PG = \frac{1}{2}\frac{G^2}{I},$$

et l'équation de l'énergie prise sous la forme (254) s'écrit

$$T' = h + W - \frac{1}{2}\frac{G^2}{I}.$$

La fonctionnelle $W - \frac{1}{2}\frac{G^2}{I}$ ne dépend, elle aussi, que de la configuration du système. Un état qui rend cette fonctionnelle maximum au sens fort, à G constant, représente un état stable d'équilibre relatif. *C'est le critère de Poincaré.*

Malgré la simplicité de ces expressions, l'étude de la stabilité pour une figure hétérogène offre de grandes difficultés.

CHAPITRE XII.

SUR LES PETITES VIBRATIONS DES ASTRES FLUIDES.

99. Les mouvements de genre un. — Afin de mieux apercevoir la portée de l'artifice de la cavité et du procédé uniforme qui en découle, rien n'est aussi instructif que de chercher à les appliquer dans des circonstances de plus en plus générales.

Nous montrerons que cette méthode s'étend à tous les mouvements dits de genre un, dont les propriétés essentielles vont être rappelées dans ce paragraphe.

Puis nous procéderons à l'étude des petites vibrations des astres fluides, objet d'une très belle étude de Lord Kelvin (1), dont il est possible de retrouver et d'approfondir les résultats.

Considérons un fluide parfait soumis à l'attraction newtonienne de ses propres particules et de corps étrangers fixes ou variables. Les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \gamma_x, \qquad \ldots, \tag{257}$$

les deux autres sont analogues; ρ est la densité, p la pression, U le potentiel newtonien et les γ sont les composantes de l'accélération; enfin t sera le temps.

S'il existe un potentiel $-\mathrm{Q}(x, y, z, t)$ *des accélérations*, les équations (257) s'écriront

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \ldots \qquad \text{avec } \Phi = \mathrm{U} + \mathrm{Q}.$$

En multipliant ces relations respectivement par les composantes δx, δy, δz d'un déplacement purement spatial, à t constant, on trouve

$$\frac{1}{\rho}\delta p = \delta\Phi. \tag{258}$$

(1) *Phil. Trans.*, 1863, p. 573-616.

Sur une surface où $\delta p = 0$ à l'instant t, on a aussi $\delta\Phi = 0$ et réciproquement. Il existe donc entre p et Φ une relation de la forme $\Phi = \Phi(p, t)$ et l'équation (258) s'écrit

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial p}.$$

La densité elle aussi ne pourra dépendre que de p et de t et l'on aura

$$\rho = \rho(p, t). \tag{259}$$

Une surface sur laquelle, au cours du mouvement, la pression sera constamment la même sera une surface d'égale densité, mais la valeur de cette densité pourra varier au cours du temps.

Réciproquement, l'existence d'une relation de la forme (259) implique l'existence d'un potentiel des accélérations.

En effet, la relation (259) permet de former le potentiel

$$\Phi = \int_0^p \frac{dp}{\rho(p, t)},$$

l'intégrale étant prise à t constant. Les équations (257) s'écrivent alors

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \gamma_x, \qquad \ldots,$$

ce qui signifie que les accélérations dépendent du potentiel

$$U - \Phi.$$

L'équation (259) peut avoir lieu en vertu même de la nature du mouvement ou encore en vertu d'une équation caractéristique. La première circonstance se présente pour tout équilibre relatif de la masse fluide ou encore pour toute rotation permanente de genre un. Les pulsations des céphéides hétérogènes fournissent un autre exemple intéressant. A chaque instant les surfaces d'égale densité et d'égale pression sont sphériques. Les deux familles coïncident géométriquement. Mais une surface sur laquelle la densité est constamment la même peut supporter des pressions différentes au cours du temps.

Nous appelons comme précédemment « mouvement de genre un » ou encore « mouvement barotrope » tout mouvement pour lequel on a

$$\rho = \rho(p, t),$$

où t est le temps. Ces mouvements sont aussi caractérisés par l'existence d'un potentiel des accélérations. M. Bjerknes dirait fluide barotrope.

100. Résumé et extension de la méthode de la cavité. — Pour tout mouvement de genre un, les équations de l'hydrodynamique (257) se résument en celle-ci, où Φ ne dépend que de ρ et de t :

$$\Phi = U + Q. \tag{260}$$

Le laplacien étant pris à t constant, bien entendu, on a

$$\Delta\Phi = \Delta U + \Delta Q = -4\pi i\rho + \Delta Q, \tag{261}$$

où i est la constante de l'attraction universelle. Soit, maintenant, S une surface régulière à l'intérieur de laquelle Φ est supposée être une fonction régulière au sens fort.

En tout point P intérieur à S, l'identité suivante est vérifiée :

$$\int \frac{1}{r}\Delta\Phi\, dC + \int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\, dS + 4\pi\Phi_P - \int \Phi \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, dS = 0, \tag{262}$$

dans laquelle C est la région intérieure à S et les dérivées normales sont prises vers l'intérieur. De la relation (261) on tire

$$4\pi i\rho = \Delta Q - \Delta\Phi. \tag{263}$$

Le potentiel newtonien s'écrit d'autre part

$$U = i\int \frac{1}{r}\rho\, dC + i\int \frac{1}{r}\rho\, dZ,$$

où Z est l'espace entier extérieur à S. Tirons la densité de l'expression (263) et portons-la dans l'intégrale étendue à la cavité. On trouve ainsi

$$4\pi U = \int \frac{1}{r}\Delta Q\, dC - \int \frac{1}{r}\Delta\Phi\, dC + 4\pi i\int \frac{1}{r}\rho\, dZ.$$

Enfin remplaçons U par $\Phi - Q$ et l'intégrale en $\Delta\Phi$ par sa valeur tirée de (262), ce qui donne à l'intérieur de S

$$\int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\, dS + 4\pi i\int \frac{1}{r}\rho\, dZ - \int \Phi \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, dS + 4\pi Q_P + \int \frac{\Delta Q}{r}\, dC = 0, \tag{264}$$

Je dis que cette équation est équivalente à l'équation fondamentale

$$\Phi = U + Q \tag{265}$$

dans ce sens que (265) implique (264) comme nous venons de le voir et que réciproquement si (264) est satisfaite pour toute surface S fermée

appartenant à une famille qui balaie l'astre entier, la relation (265) est satisfaite aussi.

Cette réciproque se démontre comme précédemment. L'identité (262) permet d'écrire (264) sous la forme

$$(266) \qquad 4\pi i \int \frac{1}{r} \rho \, dZ + \int \frac{1}{r} (-\Delta\Phi + \Delta Q) \, dC + 4\pi Q_P - 4\pi \Phi_P = 0.$$

Pour deux surfaces S infiniment voisines, on aura à l'intérieur de la plus petite

$$\int \frac{1}{r} (\Delta\Phi - \Delta Q + 4\pi i \rho) \, dZ^+ = 0,$$

Z^+ étant la région comprise entre les deux. Cette relation exige que l'on ait

$$\Delta\Phi - \Delta Q = -4\pi i \rho$$

et la relation (266) s'écrit $\Phi = U + Q$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Cette extension de la méthode de la cavité est faite à trois points de vue :

1° *Le fluide envisagé peut être animé d'un mouvement de genre un*, il suffit donc que l'on ait $\rho = \rho(p, t)$.

2° *Les surfaces* S *peuvent être quelconques, pourvu qu'elles balaient dans leur ensemble l'astre entier*. Elles doivent être *fermées*, elles peuvent avoir la connexion de la sphère, du tore ou d'autres surfaces pour lesquelles l'identité (262) est encore vérifiée.

3° *L'astre peut être soumis à l'influence newtonienne constante ou variable de corps étrangers.*

101. Remarques sur les surfaces arguments. — Deux choix particuliers de familles de surfaces S s'imposent à l'attention :

a. Une famille de surfaces fluides qui, comme on le sait, accompagnent les particules dans leurs mouvements : $f(x, y, z, t) = \text{const.}$

b. Les surfaces sur lesquelles la pression garde spatialement et temporellement la même valeur $p(x, y, z, t) = \text{const.}$

Dans ce dernier cas, il faudra que ces surfaces restent fermées et ne se scindent pas quand on passe de la surface libre à l'intérieur.

Ces deux familles ne coïncident pas forcément et les surfaces d'égale pression ne sont pas toujours des surfaces fluides.

Le choix *b* simplifie l'équation (264), car Φ est alors spatialement

constant sur S puisque l'on a $\Phi = \Phi(p, t)$. L'équation devient

$$(267) \qquad \int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\,dS + 4\pi i \int \frac{1}{r}\rho\,dZ = 4\pi\Phi_S - 4\pi Q_P - \int \frac{1}{r}\Delta Q\,dC.$$

On connaît l'avantage de cette relation : aucune des deux intégrales du premier membre ne porte sur la cavité intérieure à S et l'on peut développer $\frac{1}{r}$ suivant les puissances des distances du point potentié P au point potentiant P', et ce développement pourra n'être employé que là où il converge absolument et uniformément, c'est-à-dire au voisinage du centre de l'astre, point commun à toutes les cavités. Les deux membres de (267) sont d'ailleurs harmoniques à l'intérieur de la cavité et il suffira d'identifier leur développement de Taylor au voisinage du centre pour satisfaire à l'équation.

On peut déduire de (267) une nouvelle extension du théorème de Stokes.

102. Le procédé uniforme — Comme précédemment, τ sera la distance du point potentié P au centre O de l'astre, R la distance de O au point potentiant P', j'entends au point variable d'intégration; γ sera l'angle POP' et X_q le $q^{\text{ième}}$ polynome de Legendre. Nous pouvons écrire

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\frac{\tau}{R}\right)^q X_q(\cos\gamma).$$

D'autre part, les surfaces sur lesquelles la pression est et reste constante seront caractérisées par un paramètre j. On a évidemment $p(j)$, $\rho(j, t)$ puis $R(j, \theta, \psi, t)$, où θ est la colatitude géocentrique et ψ la longitude.

Dès lors, le coefficient de τ^q dans le premier membre de l'équation fondamentale (267) est

$$(268) \qquad [R] = -\frac{\partial\Phi}{\partial j}H\left(\frac{\partial R}{\partial j}\right)^{-1}R^{1-q} + 4\pi i\int_j^{j_1}\rho R^{1-q}\frac{\partial R}{\partial j}\,dj.$$

La fonction H a la même valeur que précédemment

$$H = 1 + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial\psi}\right)^2,$$

en plus j_1 est la valeur du paramètre j qui caractérise la surface libre $p = 0$. La dernière intégrale de (268) provient de la zone Z allant de la surface j à la surface j_1. S'il y a des corps extérieurs, leur potentiel

newtonien sera inscrit dans les seconds membres de (267) pour plus de simplicité.

Posons encore

$$(269) \qquad Q + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\Delta Q\, d\mathrm{C} = \sum_{q=0}^{+\infty} \tau^q\, Y_q(j, 0, \psi, t),$$

les Y_q étant des fonctions sphériques de rang q en θ et ψ. Un tel développement est toujours possible, puisque le premier membre est une fonction harmonique. Il sera valable au voisinage du centre de l'astre, et c'est tout ce qu'il nous faut.

L'identification des puissances de τ dans les deux membres de l'équation fondamentale (267) donne

$$(270) \qquad [R]_q = \begin{cases} iM - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \Delta Q\, d\mathrm{C} & \text{si } q = -1, \\ \Phi(j, t) - Y_0 & \text{si } q = 0, \\ -(2q+1)\, Y_q(j, 0, \psi, t) & \text{si } q = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

L'équation relative à $q = -1$ n'est autre, comme précédemment, que l'équation de Poincaré transformée. Elle détermine la masse totale M. Les autres $q = 0, 1, 2, 3, \ldots$ représentent dans leur ensemble la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\Phi = U + Q$ soit satisfaite.

L'indice q au bas du crochet en R signifie la fonction sphérique de rang q du développement du crochet, comme précédemment.

Le tableau (270) est absolument rigoureux, j'entends qu'aucune approximation n'a été faite et que le développement de $\frac{1}{r}$ n'a été employé que là où il converge.

103. **Les approximations pour les sphéroïdes.** — La densité ρ et le potentiel de la pesanteur Φ sont spatialement constants sur les surfaces j où la pression est spatialement et temporellement constante. Mais les valeurs de Φ et de ρ peuvent varier au cours du temps sur ces dernières surfaces. Nous poserons en conséquence

$$\rho(j, t) = \rho^0(j) + \rho^1(j, t), \qquad \Phi(j, t) = \Phi^0(j) + \Phi^1(j, t).$$

Pour les petits mouvements au voisinage d'un état stable d'équilibre, absolu ou relatif, on conviendra utilement que ρ^0 et Φ^0 représentent les valeurs de ρ et de Φ dans cet état.

Au voisinage du repos absolu, caractérisé par une répartition sphérique des couches d'égale densité et d'égale pression, j représentera le

rayon de la sphère sur laquelle la pression est $p(j)$ dans l'état de repos absolu.

Pour l'étude des petits mouvements au voisinage de l'état sphérique, nous poserons, comme précédemment,

$$R = j(1+e) \qquad \text{avec} \qquad e(j, \theta, \psi, t).$$

Cette fonction e est encore la déformation radiale rapportée au rayon de la sphère.

Enfin, nous envisagerons : les accélérations et leur potentiel $-Q$, les modifications ρ^1 et Φ^1 de la densité et du potentiel de la pesanteur, enfin la déformation e comme de l'ordre de grandeur d'une quantité petite λ.

Développons les deux membres du système (270) suivant les puissances de λ et identifions en λ. Les termes en λ^0 donnent

$$-\frac{d\Phi^0}{dj} j^{1-q} + 4\pi i \int_j^{j_1} \rho^0 j^{1-q}\, dj = \begin{cases} iM & \text{si } q = -1, \\ \Phi^0 & \text{si } q = 0. \end{cases}$$

Ce système correspond à la stratification sphérique et au repos absolu. Il se résout ainsi :

$$-\frac{d\Phi^0}{dj} = \frac{4}{3}\pi i j\, D(j),$$

$D(j)$ étant la densité moyenne de la matière intérieure à la sphère de rayon j. Le premier membre n'est autre que la pesanteur sur cette sphère.

L'identification des termes en λ^1 donne ensuite

$$(271) \quad 4\pi i \left\{ e \right\}_q = \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial j} j^2 - 4\pi i \displaystyle\int_j^{j_1} \rho^1 j^2\, dj - \frac{1}{4\pi} \int \Delta Q\, dC & \text{si } q = -1, \\ \Phi^1 + \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial j} j - 4\pi i \displaystyle\int_j^{j_1} \rho^1 j\, dj - Y_0 & \text{si } q = 0, \\ -(2q+1)\, Y_q(j, \theta, \psi, t) & \text{si } q = 1, 2, 3, 4, \ldots. \end{cases}$$

L'accolade en e est analogue [1] à celle déjà rencontrée précédemment [2]

$$\left\{ e \right\} = -\frac{D}{3} j^{3-2q} \frac{\partial e j^q}{\partial j} + \int_j^{j_1} \rho \frac{\partial e j^{2-q}}{\partial j} dj.$$

Le tableau (271) *est encore très général et convient à tous les petits*

[1] Elle n'en diffère que par le facteur $4\pi i$.

[2] Page 85.

mouvements de genre un au voisinage de la sphère. On pourrait, comme dans le cas de l'équilibre relatif, pousser jusqu'à l'identification des termes en λ d'un ordre quelconque. Mais nous en resterons là.

Si la relation générale $\rho = \rho(p, t)$ se réduit à la forme plus simple $\rho = f(p)$, ρ et Φ gardent une valeur constante sur les surfaces j et le système (271) s'écrit plus simplement, les fonctions ρ' et Φ' étant identiquement nulles,

$$(272) \qquad 4\pi i \{ e \}_q = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi} \int \Delta Q \, dC & \text{si } q = -1, \\ -(2q+1)\, Y_q(\theta, \psi, t) & \text{si } q = 0, 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Pour les mouvements par sphères concentriques des céphéides, les deux premières équations du système (272) interviennent seules. Pour les changements de forme des surfaces d'égale pression, ce sont au contraire les équations relatives à $q = 1, 2, 3, \ldots$ qui interviennent et c'est sur ces dernières que nous allons porter notre attention.

104. **Développements et identifications.** — Désignons par $e_q(j, t, \theta, \psi)$ la fonction sphérique de rang q du développement de e en θ et ψ. Nous aurons donc

$$e = \sum_{q=0}^{\infty} e_q \qquad \text{et} \qquad \{ e \}_q = \{ e_q \};$$

cette dernière relation est immédiate puisque l'accolade représente une opération en j. Le tableau (272) s'écrit pour $q > 0$

$$(273) \qquad \{ e_q \} = -\frac{2q+1}{4\pi i} Y_q(j, \theta, \psi, t).$$

Développons e_q et Y_q en fonctions sphériques fondamentales $Y_{q,m}(\theta, \psi)$:

$$e_q(j, \theta, \psi, t) = \sum_{m=-q}^{+q} e_{q,m}(j, t)\, Y_{q,m}(\theta, \psi),$$

$$Y_q(j, \theta, \psi, t) = \sum_{m=-q}^{+q} \alpha_{q,m}(j, t)\, Y_{q,m}(\theta, \psi).$$

Le tableau (273) donne lieu à une identification en les $Y_{q,m}$, d'où

$$(274) \qquad \{ e_{q,m}(j, t) \} = -\frac{2q+1}{4\pi i} \alpha_{q,m}(j, t).$$

Supposons la fonction e analytique en j, une singularité au centre de

l'astre étant actuellement exclue *a priori* (p. 85). On aura

$$e_{q,m}(j, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{q,m}^{(n)}(t) j^n.$$

Le système (274) se réduit au suivant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{q,m}^{(n)}(t) \{ j^n \} = -\frac{2q+1}{4\pi i} \alpha_{q,m}(j, t). \tag{275}$$

Enfin notons que l'on a, pour une masse hétérogène,

$$\{ j^n \} = -\frac{n+q}{3} \mathrm{D} j^{2-q+n} + (2-q+n) \int_i^{j_1} \rho j^{1-q+n} \, dj \tag{276}$$

et, pour une masse entièrement homogène,

$$\{ j^n \} = \mathrm{D} \left(-\frac{n+q}{3} j^{2-q+n} + j_1^{2-q+n} - j^{2-q+n} \right). \tag{277}$$

Puis, pour une masse quelle qu'elle soit,

$$\{ j^{q-2} \} = -\frac{2}{3}(q-1)\mathrm{D}, \tag{278}$$

comme le montre la formule (276) dans laquelle on fait $n = q - 2$.

Les calculs précédents consistent à pousser l'identification des deux membres du tableau (272) aussi loin que possible pour $q = 1, 2, 3, \ldots$.

Ces développements généraux faciliteront beaucoup les applications de la fin de ce Chapitre. Ils permettent de traiter d'autres problèmes encore.

105. Équations complémentaires. — Invoquons quelques résultats généraux qui s'établissent directement et, pour ne pas interrompre la continuité de cet exposé, renvoyons la démonstration des trois premiers à la fin.

1° L'équation de continuité dont on n'avait pas à tenir compte dans la recherche des figures d'équilibre ou dans les rotations permanentes implique la relation suivante :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2 \rho}{dt^2} = \Delta \mathrm{Q},$$

où la dérivée de ρ est prise en suivant la particule dans son mouvement.

2° Si le fluide est incompressible, la densité est constante le long des trajectoires et le potentiel des accélérations est alors harmonique.

Dans ce cas, les fonctions Y_q sont celles du développement de Q lui-même et l'on a

$$Q = \sum_{q=0}^{+\infty} j^q Y_q(\theta, \psi, t).$$

3° Si $j\eta$ représente la projection sur le rayon vecteur du déplacement de la particule dans son petit mouvement, on aura

$$\eta'' = -\sum_{q=1}^{+\infty} q j^{q-2} Y_q(\theta, \psi, t);$$

η'' est l'accélération radiale rapportée.

4° Dans la suite, nous pourrons tirer parti du fait que la surface libre $p = 0$ est une surface fluide. Pour cette dernière, on doit avoir constamment $e = \eta$ et $e'' = \eta''$. C'est facile à vérifier.

5° Pour une masse homogène et incompressible, le volume total restera constant et l'on aura à chaque instant

$$\int e \, d\Sigma = 0,$$

où Σ est la sphère de rayon j_1. Cette condition implique que le terme e_0 du développement de e soit identiquement nul.

6° Le centre de gravité de la masse supposée isolée ne pourra pas se déplacer par rapport aux axes x, y, z qui lui sont attachés, ce qui implique que l'on ait constamment

$$\int x \, dV = 0, \qquad \int y \, dV = 0, \qquad \int z \, dV = 0,$$

V étant le volume occupé par l'astre envisagé. Ces relations impliquent à leur tour l'inexistence du terme e_1 dans le développement de e, d'où $e_{1,m} = 0$.

Ce développement s'écrira

$$e = \sum_{q=2}^{\infty} e_q.$$

7° De même dans η'', il n'y a pas de termes en $q = 1$, car ils répondraient à une accélération $j\eta''$ du centre de gravité, lequel ne doit pas en subir en l'absence de corps perturbateurs. On a donc

$$\eta'' = -\sum_{q=2}^{+\infty} q j^{q-2} Y_q(\theta, \psi, t). \tag{279}$$

La présence de corps étrangers modifierait cette dernière remarque, comme on le verra au paragraphe 109. Passons aux applications.

106. Les vibrations propres d'un fluide homogène et incompressible. — Le fluide satisfait actuellement aux deux relations $\rho = \text{const.}$ et $\Delta Q = 0$. Le potentiel Φ se réduit à $\frac{p}{\rho}$ et les fonctions ρ' et Φ' sont identiquement nulles. D'autre part, les Y_q représentent les fonctions sphériques du développement de Q. Ce potentiel n'étant défini qu'à une constante près, on peut supposer Y_0 nul. Le tableau (271) en e s'écrit donc pour un fluide homogène et incompressible

$$\{e_q\} = \begin{cases} 0 & \text{si } q = -1, \\ 0 & \text{si } q = 0, \\ -\frac{2q+1}{4\pi i} Y_q(\theta, \psi, t) & \text{si } q > 0, \end{cases} \tag{280}$$

et les calculs faits au paragraphe 104 s'appliquent. Les seconds membres de (280) sont indépendants de j; il doit en être de même des premiers, ce qui exige, en vertu de (277), que l'on ait $n = q - 2$. Ensuite, en tenant compte de (278) et posant

$$\mu_q = \frac{3}{2} \frac{2q+1}{q-1} \frac{1}{4\pi i D},$$

l'équation (275) se réduit à

$$a''_{q,m}(t) = \mu_q \alpha_{q,m}(t).$$

Puis on trouve

$$e_{q,m}(j, t) = \mu_q j^{q-2} \alpha_{q,m}(t). \tag{281}$$

Mais d'autre part, pour les déplacements radiaux des particules, on a

$$\eta''_{q,m}(j, t) = -qj^{q-2} \alpha_{q,m}(t). \tag{282}$$

Or, la surface libre est suivie par ses particules et c'est une surface à pression constante. On aura donc sur celle-ci

$$e = \eta, \qquad e'' = \eta'', \qquad e''_{q,m} = \eta''_{q,m}, \qquad j = j_1,$$

et les équations (281) et (282) donnent lieu à la relation

$$\mu_q \alpha''_{q,m}(t) = -q \alpha_{q,m}(t). \tag{283}$$

Si cette équation est vérifiée sur la surface libre $j = j_1$, les dérivées $e''_{q,m}$ et $\eta''_{q,m}$ coïncideront pour toute valeur de j, c'est-à-dire dans l'astre entier; et l'on peut même écrire $e = \eta$ quels que soient j et t, car il est

impossible pour les petits mouvements que les déformations e et les déplacements η diffèrent par une fonction linéaire du temps. En résumé :

Pour un astre fluide, homogène et incompressible, les surfaces à pression constante sont des surfaces fluides. Une particule est soumise, au cours de son petit mouvement, à une pression invariable.

Reprenons l'équation (283). Elle s'écrit

$$\alpha''_{q,m}(t) + \omega_q^2 \alpha_{q,m}(t) = 0$$

avec

$$\omega_q^2 = \frac{8\pi}{3} q \frac{q-1}{2q+1} iD.$$

Son intégration est classique, les A et B étant des constantes, on a

$$\alpha_{q,m}(t) = A_{q,m} \cos \omega_q t + B_{q,m} \sin \omega_q t.$$

Les quantités ω_q sont les fréquences des vibrations représentées par les fonctions $Y_{q,m}$. Elles ne dépendent que du premier indice de la fonction sphérique. Les déformations radiales sont

$$e = \eta_1 = \sum_{q=2}^{\infty} j^{q-2} [Y_q^1(\theta, \psi) \cos \omega_q t + Y_q^2(\theta, \psi) \sin \omega_q t]$$

avec

$$Y_q^1(\theta, \psi) = \mu_q \sum_{m=-q}^{+q} A_{q,m} Y_{q,m}(\theta, \psi),$$

$$Y_q^2(\theta, \psi) = \mu_q \sum_{m=-q}^{+q} B_{q,m} Y_{q,m}(\theta, \psi).$$

Sous réserve que le volume et le centre de gravité restent inaltérés, on peut se donner arbitrairement la déformation radiale et les vitesses radiales pour la surface libre à l'instant initial $t = 0$, car

$$e(0) = \sum_{q=2}^{+\infty} j_1^{q-2} Y_q^1(\theta, \psi),$$

$$e'(0) = \sum_{q=2}^{+\infty} \omega_q j_1^{q-2} Y_q^2(\theta, \psi),$$

et ces deux conditions détermineront d'une manière unique les coefficients

$$A_{q,m}, \quad B_{q,m} \quad \text{pour } q \geq 2; \qquad -q \leq m \leq +q;$$

les autres sont nuls.

La vibration propre d'ordre q possède la période

$$\tau_q = \frac{2\pi}{\omega_q} = \sqrt{\frac{3}{2}}\pi\sqrt{\frac{2q+1}{q(q-1)}}\frac{1}{\sqrt{iD}},$$

déterminée par Lord Kelvin (1).

Elle est inversement proportionnelle à la racine carrée de la densité du fluide, elle est indépendante des dimensions et décroît avec le rang q de la fonction sphérique. Sa valeur asymptotique est

$$\tau_q \sim \sqrt{\frac{3\pi}{iD}}\frac{1}{\sqrt{q}}.$$

D'autre part, la vibration d'ordre q, représentée par je_q, diminue comme j^{q-1} quand q tend vers zéro ; elle atteint la $n^{\text{ième}}$ partie de sa valeur sur une sphère j_2 telle que l'on ait

$$\left(\frac{j_2}{j_1}\right)^{q-1} = \frac{1}{n},$$

et si q est très grand, j_2 peut être très voisin de j_1. Cette question est analogue à celle de la houle. Les vibrations fondamentales je_q d'ordre élevé répondent aux petites vagues, elles ont une période très courte et leur influence est minime à quelque profondeur.

Au centre de l'astre, la vibration d'ordre 2 est seule à se manifester sur la vibration radiale rapportée; on a en effet

$$(je)_{j=0} = 0, \qquad (e)_{j=0} = Y_2(\theta, \psi, t).$$

Enfin, dans l'expression (278), les intégrales prises de j à j_1 ont disparu pour $n = q - 2$. Cette zone crée donc un potentiel constant, le même que dans l'état d'équilibre absolu.

Le potentiel créé par la matière répartie entre les deux surfaces fluides $p = 0$ et $p = c$ reste constant à l'intérieur de cette seconde surface.

La pression étant constante sur la seconde surface, on déduit aisément de cette dernière propriété la proposition suggestive suivante : *chaque cavité vibre comme si la zone correspondante n'existait pas*. Par cavité nous entendons, bien entendu, le noyau qu'elle remplace.

Rien ne serait modifié du mouvement d'une cavité si à partir d'un instant la zone était anéantie.

---

(1) *Phil. Trans.*, 1863, p. 610.

Le potentiel des accélérations — Q peut s'écrire

$$-\mathrm{Q} = +\sum_{q=2}^{\infty} j^q \, \mathrm{Y}_q(\theta, \psi, t) = \sum_{q=2}^{\infty} \mathrm{P}_q^1 \cos\omega_q t + \mathrm{P}_q^2 \sin\omega_q t.$$

Il existe un potentiel des vitesses — φ

$$-\varphi = +\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{\omega_q} (\mathrm{P}_q^1 \sin\omega_q t - \mathrm{P}_q^2 \cos\omega_q t),$$

et même un potentiel des déplacements — Ψ

$$-\Psi = -\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{\omega_q^2} (\mathrm{P}_q^1 \cos\omega_q t + \mathrm{P}_q^2 \sin\omega_q t),$$

comme on le vérifierait facilement. Voir pour cela paragraphe 110.

Les fonctions P_q^1 et P_q^2 sont des polynomes harmoniques et homogènes de degré q en x, y, z.

107. **Sur les petites vibrations d'une masse incompressible hétérogène.** — Demandons-nous s'il est possible que les particules suivent les surfaces à pression constante pour un fluide incompressible et hétérogène? On aurait encore pour $o \leq j \leq j_1$

$$e = \tau_1, \qquad e'' = \tau_1'', \qquad \{ e_q'' \} = \{ \tau_{1q}'' \},$$

mais les accélérations radiales donnent en vertu de (279)

$$\{ \tau_{1q}'' \} = -q \{ j^{q-2} \} \mathrm{Y}_q(\theta, \psi, t)$$

et les déformations radiales, en vertu du tableau (280),

$$\{ e_q'' \} = -\frac{2q+1}{4\pi i} \mathrm{Y}_q''(\theta, \psi, t).$$

On en déduit facilement

$$\frac{8\pi}{3} \frac{q(q-1)}{2q+1} i\mathrm{D} = -\frac{\mathrm{Y}_q''(\theta, \psi, t)}{\mathrm{Y}_q(\theta, \psi, t)}.$$

Or le second membre ne dépend pas de j et la densité moyenne $\mathrm{D}(j)$ serait une constante.

Seule la masse homogène permet aux particules de rester à pression constante au cours des petits mouvements, si le fluide est incompressible.

Les surfaces d'égale densité ne pourraient-elles pas, cependant, rester des surfaces d'égale pression pour une masse hétérogène?

Non, car on aurait une relation de la forme $\rho = \rho(p, t)$; la méthode précédente s'appliquerait, les surfaces d'égale densité seraient des surfaces fluides puisque le liquide est supposé incompressible, elles pourraient être prises pour surfaces S et l'absurdité signalée serait inéluctable si D n'est pas constant.

Pour une masse hétérogène et incompressible, il est impossible que la famille des surfaces d'égale densité coïncide constamment avec la famille des surfaces d'égale pression au cours des petits mouvements au voisinage de la sphère.

Les deux stratifications devraient différer.

Une relation de la forme $\rho = \rho(p, t)$ est donc impossible, ce qui implique, on l'a vu, l'inexistence des potentiels Φ et Q.

Pour les petits mouvements au voisinage de la sphère d'un fluide hétérogène incompressible, il n'y a ni potentiel de la pesanteur ni potentiel des accélérations. Ses oscillations sont donc baroclines.

108. Le cas d'un astre perturbateur. — Si un corps étranger attire l'astre envisagé, son potentiel sera porté dans le second membre de l'équation fondamentale (267) qui s'écrit

$$\int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\,dS + 4\pi i \int \frac{1}{r}\rho\,dZ = \Phi_S - 4\pi Q_P - \int \frac{1}{r}\Delta Q\,dC - 4\pi i \int \frac{1}{r}\rho\,dV.$$

Pour simplifier les écritures, supposons qu'il n'y ait qu'un corps perturbateur et de forme sphérique. Soient m sa masse et l sa distance au centre de l'astre primitif. Le dernier terme s'écrit, comme on le sait,

$$-4\pi i \frac{m}{r},$$

γ étant l'angle du vecteur OP avec la droite qui unit les centres; on aura pour ce corps étranger

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l}\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\frac{\tau}{l}\right)^q X_q(\cos\gamma).$$

Le système fondamental s'écrit encore, par identification en τ, pour tout fluide à relation $\rho = f(p, t)$,

$$[R]_q = \begin{cases} iM - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \Delta Q\,dC & \text{si } q = -1, \\ \Phi(j, t) - Y_0 - \dfrac{im}{l} & \text{si } q = 0, \\ -(2q+1)\left[Y_q(j, 0, \psi, t) + \dfrac{im}{l^{q+1}} X_q(\cos\gamma)\right] & \text{si } q > 0. \end{cases}$$

Si le fluide est incompressible $\Delta Q = 0$, les fonctions Y_q sont celles du développement de Q et Y_0 peut être supposée nulle. Enfin, les termes en Y_1 et $\frac{im}{l^2} X_1(\cos\gamma)$ sont : l'un, le potentiel d'une accélération spatialement constante, et l'autre, le potentiel d'un champ de force spatialement constant dirigé vers l'astre perturbateur. Ces deux termes s'entre-détruisent si l'on repère, comme nous le supposons toujours, le mouvement du fluide au moyen d'un système d'axe de direction fixe attaché au centre de gravité. On sait en effet qu'en obéissant à un champ de gravitation on le supprime. Il n'y aura donc pas lieu de tenir compte de l'équation $q = 1$ qui est identiquement satisfaite.

Les équations en e deviennent pour $q > 1$

$$e\}_q = -\frac{2q+1}{4\pi i} Z_q(\theta, \psi, t) \tag{284}$$

avec

$$Z_q(\theta, \psi, t) = Y_q(\theta, \psi, t) + \frac{im}{l^{q+1}} X_q(\cos\gamma). \tag{285}$$

La fonction Z_q contient encore, par l'intermédiaire de γ, les coordonnées polaires θ' et ψ' de l'astre perturbateur, mais il est inutile de les y faire figurer. Nous poserons comme précédemment

$$Z_q(\theta, \psi, t) = \sum_{m=-q}^{+q} \alpha_{q,m}(t)\, Y_{q,m}(\theta, \psi).$$

Pour une masse homogène et incompressible, l'équation (284) donne, par des calculs analogues à ceux du paragraphe 106,

$$e_q = \mu_q j^{q-2} Z_q(\theta, \psi, t). \tag{286}$$

Le potentiel des accélérations donne pour les déplacements radiaux

$$\eta''_q = -qj^{q-2} Y_q(\theta, \psi, t) \tag{287}$$

et sur la surface libre on a à chaque instant $e = \eta$, d'où

$$Z''_q + \omega_q^2 Y_q = 0,$$

mais nous avons posé (285).

On peut éliminer Y_q entre cette relation et l'équation (285) :

$$Z''_q + \omega_q^2 Z_q = +im \frac{\omega_q^2}{l^{q+1}} X_q(\cos\gamma). \tag{288}$$

C'est une équation en t à coefficients constants avec second membre. Son intégration pourrait se faire comme précédemment sur les coeffi-

cients $\alpha_{q,m}(t)$. Les équations seraient de la forme plus simple

$$\alpha''(t) + \omega^2 \alpha(t) = f(t). \tag{289}$$

La solution générale de cette dernière équation peut s'écrire, comme on le vérifie facilement,

$$\alpha(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau,$$

et l'on a

$$\alpha'(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t + \int_0^t f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau.$$

Pour $t = 0$, α et α' se réduisent comme précédemment à A et ωB.

Si l'on revient à l'équation (288) on trouve

$$Z_q(\theta, \psi, t) = Y_q^1(\theta, \psi)\cos\omega_q t + Y_q^2(\theta, \psi)\sin\omega_q t + im\frac{\omega_q}{l^{q+1}}\int_0^t X_q(\cos\gamma)\sin\omega_q(t-\tau)\,d\tau.$$

Si m est nulle, Z_q se réduit à la vibration fondamentale d'ordre q rencontrée précédemmment. La déformation radiale s' écrit

$$e = \sum_{q=2}^{+\infty} \mu_q j^{q-2} Z_q(\theta, \psi, t).$$

A l'instant initial, on pourra se donner e et sa dérivée e' sur la surface libre en respectant les conditions relatives au volume et au centre de gravité par rapport aux axes entraînés. On a en effet

$$e(0) = \sum_{q=2}^{+\infty} \mu_q j_1^{q-2} Y_q^1(\theta, \psi),$$

$$e'(0) = \sum_{q=2}^{+\infty} \omega_q \mu_q j_1^{q-2} Y_q^2(\theta, \psi),$$

conditions qui déterminent les fonctions sphériques Y_q^1 et Y_q^2.

Les positions initiales et les vitesses radiales initiales des points de la surface libre peuvent donc être données à l'avance et le mouvement est entièrement déterminé à partir de là. On démontre encore les propositions suivantes que la présence de l'astre perturbateur n'empêche pas d'être vraies.

Les particules au cours de leur petit mouvement restent à pression constante pour un fluide homogène et incompressible.

Le potentiel d'une zone reste constant à l'intérieur de la cavité.

La zone peut être supprimée sans que cela change le mouvement de la cavité.

Les molécules pour une masse hétérogène et incompressible ne peuvent pas rester à pression constante dans toute la masse fluide au cours de leur petit mouvement.

Cette dernière proposition s'établit ainsi. On aurait $e = \eta$, d'où $e'' = \eta''$, d'où $\{e''_q\} = \{\eta''_q\}$, mais cette relation implique par (286) et (287)

$$Z''_q(\theta, \psi, t) = -\frac{2}{3}\frac{q}{2q+1}(q-1)i\,D\,Y_q(\theta, \psi, t);$$

Z_q et Y_q ne contenant pas j, il faudrait que D fût une constante. Il est encore impossible que les surfaces d'égale densité coïncident au point de vue géométrique avec les surfaces d'égale pression, et il n'y a ni potentiel de la pesanteur, ni potentiel des accélérations.

La présence d'un astre perturbateur ne pouvait, c'était à prévoir, mettre en défaut les propositions soulignées au paragraphe précédent, puisque son potentiel newtonien s'ajoutait simplement au potentiel de la zone.

Remarques. — *a.* Quelle serait la forme de l'Océan si l'astre perturbateur restait immobile par rapport à la Terre ? La réponse est immédiate pour un astre complètement fluide. En effet, cette configuration d'équilibre répond à la solution particulière $\alpha = \frac{f}{\omega^2}$ de l'équation (289) en α où f est alors constant. La déformation totale est pour cette marée statique

$$e = \frac{1}{2}\frac{m}{M}\left(\frac{j_1}{j}\right)^3 \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2q+1}{q-1}\left(\frac{j}{l}\right)^{q+1} X_q(\cos\gamma).$$

La déformation principale (celle d'ordre 2) s'écrit

$$e_2 = \frac{5}{2}\frac{m}{M}\left(\frac{j_1}{l}\right)^3 X_2(\cos\gamma).$$

Le polynome de Legendre X_2 présente deux maxima, l'un dans la direction de l'astre, l'autre dans le sens opposé. Ce sont les deux marées hautes aux antipodes l'une de l'autre.

b. Il est clair que s'il y a plusieurs corps perturbateurs, les déformations s'ajouteront tout simplement et au lieu des termes en im nous aurions une somme de termes semblables en im', im'', ...

c. Il ne serait pas difficile d'étudier par cette méthode les petits

mouvements de deux corps fluides homogènes s'attirant mutuellement et situés assez près l'un de l'autre pour qu'il y ait lieu de faire intervenir les changements de forme de l'un dans le calcul des changements de forme de l'autre.

109. **Petites vibrations au voisinage d'un état d'équilibre relatif.** — Un astre en état d'équilibre relatif doit, comme on le sait, tourner autour d'un axe de direction fixe passant par son centre de gravité avec une vitesse angulaire constante ω.

Soit x, y, z, un système d'axes solidaires du corps dans cet état d'équilibre relatif. On considérera ce système comme fixe et, pour l'étude des petits mouvements, on ajoutera aux forces données les deux forces fictives : centrifuge et centrifuge composée. Les équations s'écrivent

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \omega x - \gamma_x + \text{force centrif. comp.}$$

Soit alors λ l'ordre de grandeur des petits mouvements, la force centrifuge composée sera de l'ordre de $\omega\lambda$. Si λ est lui-même de l'ordre de ω^2 la force centrifuge composée de l'ordre ω^3 est négligable vis-à-vis des termes en ω^2 qui créent l'aplatissement. Les équations précédentes se résument donc ainsi, à cet ordre de grandeur,

$$\Phi = U + Q + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Le potentiel des accélérations est actuellement formé des deux derniers termes changés de signe; — Q reste toujours le potentiel pour les petits mouvements. Posons

$$e = \omega^2 e^{(1)} + \lambda e^{(2)}$$

pour mettre en évidence les deux déformations : celle qui provient de la rotation d'ensemble et celle qui provient des déformations passagères. Le système fondamental s'écrit actuellement

$$[R]_q = \begin{cases} iM - \frac{2}{3}\omega^2 t^3 - \frac{1}{4\pi}\int \Delta Q \, dC & \text{si } q = -1, \\ -\omega^2 t^2 & \text{si } q = 0, \\ 0 & \text{si } q = 1, \\ -\frac{5}{3}\omega^2 X_2(\cos\theta) - 5\,Y_2(j, \theta, \psi, t) & \text{si } q = 2, \\ -(2q+1)\,Y_q(j, \theta, \psi, t) & \text{si } q = 3, 4, 5, \ldots. \end{cases}$$

L'approximation d'ordre zéro est la même que précédemment. L'ap-

proximation d'ordre un donne

$$\{e\}_q = \begin{cases} -\frac{2}{3}\omega^2 t^3 & \text{si } q = -1, \\ -\omega^2 t^2 & \text{si } q = 0, \\ 0 & \text{si } q = 1, \\ -\frac{5}{3}\omega^2 X_2(\cos\theta) - 5\, Y_2(j, \theta, \psi, t) & \text{si } q = 2, \\ -(2q+1)\, Y_q(j, \theta, \psi, t) & \text{si } q = 3, 4, 5, \ldots. \end{cases}$$

Il faut identifier les termes en ω^2 et les termes en λ.

La première identification donne

$$\{e^{(1)}\}_q = \begin{cases} -\frac{2}{3} t^3 & \text{si } q = -1, \\ -t^2 & \text{si } q = 0, \\ -\frac{5}{3} X_2(\cos\theta) & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 4, \ldots, \end{cases}$$

système qui résume la théorie classique de Clairaut sur les figures planétaires. Notons en passant que le système de repérage des surfaces d'égale densité n'est pas le même que précédemment.

La seconde identification redonne le système envisagé précédemment et pour $q > 0$ on retrouve

$$\{e^{(2)}\}_q = -\frac{2q+1}{4\pi i} Y_q(j, \theta, \psi, t).$$

Les deux déformations ne font que s'ajouter en première approximation. Il faudrait pousser jusqu'au terme en ω^3 ou ω^4 pour les voir s'influencer l'une l'autre, mais alors il faudrait faire intervenir également la force centrifuge composée qui ne serait plus négligeable, si λ est de l'ordre ω^2.

En ce qui concerne les petites vibrations, *les mêmes conclusions que précédemment subsistent, tant pour une masse homogène que pour une masse hétérogène.*

Pour une masse homogène et incompressible, on peut encore supprimer les zones sans troubler l'équilibre relatif ni les vibrations propres des cavités correspondantes. Cette recherche peut être poursuivie dans plusieurs directions, mais nous nous contenterons d'indiquer ce point de départ. Un exposé plus synthétique, relatif au cas d'un astre comportant noyau et enveloppe paraîtra prochainement dans le V 4, 1932 des *Commentarii Mathematici Helvetici*.

110. **L'équation de continuité pour les petits mouvements.** — L'équation de continuité avait pu être négligée tant qu'il s'était agi d'équilibre relatif ou de rotation permanente. Actuellement il faut en tenir compte.

Le mouvement d'une particule de coordonnées x, y, z peut être représenté par les équations

$$x = a + \mathrm{X}(a, b, c, t),$$
$$y = b + \mathrm{Y}(a, b, c, t),$$
$$z = c + \mathrm{Z}(a, b, c, t).$$

Pour les petits mouvements au voisinage d'un état d'équilibre stable, on peut fort bien supposer que a, b, c sont les coordonnées de la particule dans l'état de repos. Les fonctions X, Y, Z seront supposées petites d'un ordre de grandeur λ, de même que les dérivées

$$\frac{d\rho(x, y, z, t)}{dt}, \qquad \frac{\partial\rho(x, y, z, t)}{\partial t},$$

et nous pourrons négliger systématiquement les quantités du second ordre en

$$\mathrm{X}, \quad \mathrm{Y}, \quad \mathrm{Z}, \quad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial a}, \quad \ldots, \quad \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Il n'y aura plus lieu de prendre toutes les précautions habituelles pour le passage des coordonnées d'Euler à celles de Lagrange car on a, par exemple,

$$\mathrm{X}(x, y, z, t) = \mathrm{X}(a, b, c, t) + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial a}\mathrm{X} + \ldots,$$

et ici le dernier terme écrit et les suivants doivent être négligés. Vitesse et accélérations s'écrivent :

$$\mathrm{V}_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{X}}{dt}, \qquad \gamma_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2},$$
$$\mathrm{V}_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\mathrm{Y}}{dt}, \qquad \gamma_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2},$$
$$\mathrm{V}_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d\mathrm{Z}}{dt}, \qquad \gamma_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\mathrm{Z}}{dt^2}.$$

L'équation de continuité s'exprime ainsi, avec les coordonnées d'Euler,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial \mathrm{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{V}_z}{\partial z} = 0;$$

la dérivée de ρ est prise en suivant la particule. Dérivons cette relation par rapport à t le long des trajectoires, on trouve

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{\partial\gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_z}{\partial z} = 0.$$

Si le potentiel des accélérations existe, cette relation se simplifie et s'écrit

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2} = \Delta\mathrm{Q}.$$

On vérifierait aisément que pour les petits mouvements, l'existence du potentiel

des accélérations $-\mathrm{Q}$ implique l'existence d'un potentiel des vitesses $-\varphi$, avec

$$\varphi = \int_0^t \mathrm{Q}\, dt$$

et même d'un potentiel des déplacements $-\Psi$

$$\Psi = \int_0^t dt \int_0^t \mathrm{Q}\, dt.$$

L'équation de continuité elle-même s'écrirait

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \Delta\varphi.$$

Si le fluide est incompressible, la densité reste la même le long des trajectoires et le potentiel des accélérations est harmonique, $\Delta\mathrm{Q} = 0$. Réciproquement, si le potentiel des accélérations est harmonique, le fluide est incompressible.

111. **Sur le déplacement radial des particules.** — Soit maintenant j le rayon vecteur du point a, b, c et soit $j\eta_1$ la projection sur ce rayon du déplacement X, Y, Z de la particule. On a évidemment

$$j\eta_1 = \frac{a}{j}\mathrm{X} + \frac{b}{j}\mathrm{Y} + \frac{c}{j}\mathrm{Z}.$$

Dérivons deux fois par rapport à t en suivant la particule, on trouve

$$j\eta_1'' = \frac{a}{j}\gamma_x + \frac{b}{j}\gamma_y + \frac{c}{j}\gamma_z$$

et, s'il existe un potentiel des accélérations $-\mathrm{Q}(a, b, c, t)$,

$$-j^2\eta_1'' = a\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial a} + b\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial b} + c\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial c}.$$

Si le potentiel Q est holomorphe dans le fluide, on peut, au voisinage de chaque point, le développer en une somme de polynomes homogènes en a, b, c :

$$\mathrm{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(a, b, c, t).$$

Le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes permet d'écrire

$$j^2\eta_1'' = -\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{P}_n(a, b, c, t).$$

Pour un fluide incompressible, le potentiel Q est harmonique, donc holomorphe, et les P_n sont des polynomes harmoniques dont la valeur sur une sphère de rayon j est la même que celle d'une fonction sphérique $\mathrm{Y}_n(\theta, \psi, t)$.

On peut donc écrire, tout au moins au voisinage de l'origine,

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} j^n Y_n(\theta, \psi, t).$$

L'accélération radiale rapportée au rayon r_1'' sera définie dans ce cas par la relation

$$r_1'' = -\sum_{n=1}^{\infty} n j^{n-2} Y_n(\theta, \psi, t),$$

très importante, comme nous l'avons vu, pour l'étude des petites vibrations.

La portée et la signification de cette méthode apparaissent d'autant mieux qu'on s'attaque à des problèmes plus compliqués.

NOTE I.

A PROPOS D'UNE HYPOTHÈSE GÉOLOGIQUE (1).

Von Colberg et Marcel Bertrand, pour ne citer que deux noms, émirent l'idée que voici :

L'écorce terrestre serait animée d'un mouvement d'ensemble par rapport à un noyau central.

Que le noyau soit ou ne soit pas ce sphéroïde caractérisé par la présence de fer et de nickel appelé *Nife*, il ne m'appartient pas de le discuter. Le mouvement relatif de l'écorce et du noyau tendrait à disparaître à cause du frottement, à moins que des actions extérieures telles que les marées ne l'entretiennent.

Ce phénomène serait encore fort complexe, car ni l'écorce ni le noyau ne sont solides. Mais il n'est peut-être pas sans intérêt, *au point de vue mécanique*, de supposer solides ces deux corps et de traiter ainsi un *problème fictif*, dût-il n'avoir pour le mouvement réel qu'une valeur *purement analogique*, et d'en pousser la résolution rigoureuse aussi loin que possible.

Il serait peut-être intéressant de se rendre compte, tout au moins dans notre cas fictif, si l'hypothèse « Bertrand-von Colberg » permet effectivement d'expliquer le faisceau de phénomènes d'ordre paléontologique, climatologique ou astronomique pour l'explication desquels elle fut imaginée.

Sans doute, les observations astronomiques des derniers siècles s'opposeraient-elles à ce que l'on admît que le pôle fût animé d'un mouvement très sensible dû à un effet « Bertrand-von Colberg » qui s'ajouterait aux mouvements lents qu'on lui connaît déjà. Mais que sont trois siècles vis-à-vis de l'âge de la Terre?

Il s'agirait, en un mot, de savoir si cette pensée d'Hérodote est bien vraie : « Qu'on prodigue le temps, tout le possible arrive ».

Problème spécial.

Je supposerai :

1° l'écorce E et le noyau N, tous deux solides;

2° la surface de séparation Σ, sphérique;

3° l'existence, en chaque point de la sphère de séparation, d'un frottement, fonction de la vitesse relative des points en contact;

4° les centres de gravité de E et de N, au centre de la sphère Σ;

5° les ellipsoïdes d'inertie centraux de E et de N, sphériques.

Les conditions étant ainsi formulées, le problème revient au suivant : *calculer*

(1) *Archives des Sciences physiques et naturelles*, mars-avril 1925.

le mouvement avec frottement de deux sphères concentriques et homogènes.

Plaçons au centre de la sphère Σ l'origine d'un système d'axes fixes rectangulaires auquel nous rapporterons toutes nos mesures. Soient X_h un point de E, x_h un point de N et y_h un point de Σ; h prendra les valeurs 1, 2, 3 qui correspondent aux trois axes de coordonnées.

Soient P_h les composantes de la rotation instantanée de E, p_h celle de N et

$$\omega_h = P_h - p_h$$

celles du mouvement de E par rapport à N.

Le symbole $[X, Y]_h$ représentera le produit extérieur de deux vecteurs X et Y.

Les vitesses V et v d'un point de E et de N seront données par les équations

$$V_h = \frac{dX_h}{dt} = [P, X]_h, \tag{1}$$

$$v_h = \frac{dx_h}{dt} = [p, x]_h, \tag{2}$$

et la vitesse relative de deux points en contact sur Σ par

$$V_h - v_h = [\omega, y]_h. \tag{3}$$

Soit $\Psi(V - v)$ l'intensité de la force f de frottement, de composantes :

$$f_h = \Psi(V - v)\frac{V_h - v_h}{V - v};$$

la force f agit sur N, la force $-f$ sur E. Le vecteur Λ_h, somme des moments des forces de frottement, est dirigé suivant le vecteur ω_h; on s'en persuade aisément, il suffit d'en obtenir la longueur. Si R est le rayon de Σ et θ l'angle que fait une demi-droite variable issue de l'origine avec le vecteur ω, un calcul qui ne présente pas de difficulté permet d'écrire

$$\Lambda_h = \chi(\omega)\frac{\omega_h}{\omega},$$

en posant

$$\chi(\omega) = 2\pi R^3 \int_0^{\pi} \Psi(\omega R \sin\theta)\sin^2\theta\, d\theta.$$

Les ellipsoïdes d'inertie centraux étant sphériques, les vecteurs G_h et g_h, sommes des moments des quantités de mouvement des points de E et de N, ont respectivement les directions des rotations P_h et p_h et sont liés à celles-ci par les relations

$$G_h = aP_h, \qquad g_h = bp_h,$$

a étant le moment d'inertie de E, b celui de N, par rapport à un diamètre de Σ.

Les équations d'Euler du mouvement des axes s'écrivent

$$\frac{dG_h}{dt} = -\Lambda_h, \qquad \frac{dg_h}{dt} = +\Lambda_h,$$

d'où

$$\frac{dP_h}{dt} = -\frac{1}{a}\chi(\omega)\frac{\omega_h}{\omega}, \qquad \frac{dp_h}{dt} = \frac{1}{b}\chi(\omega)\frac{\omega_h}{\omega}. \tag{4}$$

Soustrayons la deuxième des équations (4) de la première, afin d'obtenir l'équation donnant la vitesse relative :

$$\frac{d\omega_h}{dt} = -\lambda\,\chi(\omega)\frac{\omega_h}{\omega} \qquad \text{avec } \lambda = \frac{a+b}{ab}. \tag{5}$$

Cette équation montre que la vitesse du point ω_h est dirigée suivant le vecteur ω_h de sorte que ce dernier a une direction fixe α_h. Posons donc $\omega_h = \alpha_h\omega$ et l'équation (5) se réduit à la suivante :

$$\frac{d\omega}{dt} = -\lambda\,\chi(\omega). \tag{6}$$

Affectons de l'indice zéro les grandeurs se rapportant à l'instant initial $t_0 = 0$; alors l'intégration de l'équation (6) donne

$$\int_{\omega_0}\frac{d\omega}{\chi(\omega)} = -\lambda t, \tag{7}$$

relation qui, inversée, fournira la vitesse angulaire ω en fonction du temps.

En vertu de (6), les équations (4) deviennent

$$\frac{dP_h}{dt} = \frac{b}{a+b}\frac{d\omega_h}{dt}, \qquad \frac{dp_h}{dt} = -\frac{a}{a+b}\frac{d\omega_h}{dt};$$

et, en intégrant,

$$P_h = P_h^0 - \frac{b}{a+b}\omega_h^0 + \frac{b}{a+b}\omega_h, \tag{8}$$

$$p_h = p_h^0 + \frac{a}{a+b}\omega_h^0 - \frac{a}{a+b}\omega_h. \tag{9}$$

Or la relation

$$P_h^0 - \frac{b}{a+b}\omega_h^0 = p_h^0 + \frac{a}{a+b}\omega_h^0 \tag{10}$$

équivaut à l'identité $\omega_h^0 = \omega_h^0$; désignons donc par A_h la valeur des deux membres de (10). Les vecteurs P_h et p_h se décomposent ainsi, chacun en deux vecteurs, l'un de direction A_h, l'autre de direction α_h :

$$P_h = A_h + \frac{b}{a+b}\alpha_h\omega, \tag{11}$$

$$p_h = A_h - \frac{a}{a+b}\alpha_h\omega; \tag{12}$$

ils restent donc au cours de leur mouvement dans un même plan fixe π, déterminé par leurs positions initiales P_h^0 et p_h^0, et le plan π contient également les vecteurs α_h et A_h.

Dans tous les cas de frottement que nous envisagerons, ω tendra vers zéro, de sorte qu'alors les vecteurs P_h et p_h tendront vers le vecteur A_h.

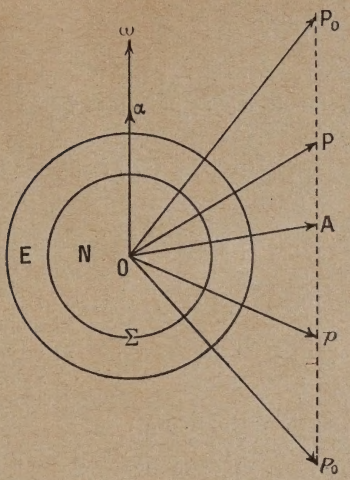
Soient A, P, p, P_0, p_0 les extrémités des vecteurs envisagés, les équations (11)

et (12) donnent lieu aux suivantes :

$$\frac{AP}{Ap} = \frac{AP_0}{Ap_0} = \frac{b}{a}. \tag{13}$$

Si les deux vecteurs P_h^0 et p_h^0 ont même direction, le plan π n'est plus déterminé, mais le problème dégénère et se simplifie, P_h et p_h ayant une même direc-

Fig. 5.



tion invariable ; la recherche du mouvement d'un point de E ou de N ne présente plus de difficulté, je laisse donc ce cas de côté.

Calculons la perte de force vive au cours du mouvement.

La force vive totale 2T est

$$2T = aP^2 + bp^2 = (a+b)A^2 + \frac{ab}{a+b}\omega^2, \tag{14}$$

cette dernière expression provenant des équations (11) et (12).

La perte de force vive depuis l'instant initial jusqu'à un instant quelconque est donc

$$\frac{ab}{a+b}(\omega_0^2 - \omega^2), \tag{15}$$

et jusqu'à la disparition du mouvement relatif elle serait

$$\frac{ab}{a+b}\omega_0^2.$$

On vérifie par les équations (14) et (6) que la différentielle de l'énergie cinétique T est bien égale au travail élémentaire des forces de frottement :

$$dT = \frac{ab}{a+b}\omega\omega'\,dt = -\chi(\omega)\omega\,dt = -A\omega\,dt.$$

L'énergie cinétique perdue s'est donc transformée, par suite du frottement, en énergie calorifique ou autre.

Examinons quelques cas particuliers de frottement.

a. Frottement proportionnel à la vitesse relative

$$\Psi(V-\rho)=K(V-\rho);$$

alors

$$\chi(\omega)=c\omega, \qquad c=\frac{8}{3}\pi R^4 K,$$

et l'équation (7) inversée donne

$$\omega=\omega_0 e^{-\lambda c t}.$$

b. Frottement proportionnel à une puissance quelconque, mais différente de l'unité, de la vitesse relative

$$\Psi(V-\rho)=K(V-\rho)^n;$$

alors

$$\chi(\omega)=c\omega^n, \qquad c=2\pi K R^{n+3}\int_0^{\pi}\sin^{n+2}\theta\, d\theta,$$

puis, en vertu de (7),

$$\omega=[\lambda c(n-1)(t-t')]^m$$

avec

$$m=\frac{1}{1-n} \qquad \text{et} \qquad t'=\frac{1}{\lambda c}\,\frac{\omega_0^{1-n}}{1-n}.$$

Distinguons deux classes de valeurs de n :

1° $n<1$, alors $t'>0$, $m>0$ et le mouvement relatif disparaît en un temps fini t'.

2° $n>1$, alors $t'<0$ et le mouvement relatif ne disparaîtrait qu'en un temps infini, comme d'ailleurs dans le cas où n est égal à 1. Ce sont là des propriétés générales d'un mouvement dans lequel le frottement est une puissance de la vitesse.

Le problème général. — Supposons remplies les conditions 1°, 2°, 4° du problème spécial, mais élargissons la condition 3° en admettant que le frottement puisse dépendre également des matières en contact sur la surface Σ et supprimons la condition 5°.

Soient alors $\varepsilon(X_h)$ la densité en un point de E, $\nu(x_h)$ la densité en un point de N et $\varphi(y)$ un coefficient particulier de frottement des matières en contact en un point y_h de Σ. Les vecteurs G_h, g_h, Λ_h sont ici

$$G_h=\int\int\int \varepsilon\big[X,[P,X]\big]_h\, dE,$$

$$g_h=\int\int\int \nu\big[x,[p,x]\big]_h\, dN,$$

$$\Lambda_h=\int\int \varphi(y)\frac{\Psi(V-\rho)}{V-\rho}[\omega,y]_h\, d\Sigma.$$

Les intégrales précédentes doivent être prises au cours du mouvement, les coordonnées X_h, x_h, Y_h étant fonctions du temps.

Les équations

$$\frac{dG_h}{dt} = -\Lambda_h, \qquad \frac{dg_h}{dt} = +\Lambda_h$$

revêtent donc la forme d'équations intégro-différentielles. Il faut d'ailleurs leur adjoindre les deux systèmes différentiels d'ordre 3 qui lient les rotations instantanées aux paramètres de position de E et de N.

Toutefois, si la fonction $\varphi(\gamma)$ se réduit à une constante, il est possible de ramener le système précédent à un système d'ordre 12 différentiel.

Si l'ellipsoïde central de l'un des deux corps est une sphère, il y a intérêt à formuler les équations du mouvement dans un système lié à l'autre corps. Ce problème général a de nombreuses applications. On peut fort bien supposer que l'écorce ne recouvre pas toute la surface Σ ou ne frotte que par une partie d'elle-même; on peut enfin envisager le cas où l'écorce se réduirait à deux calottes diamétralement opposées et étudier le cas limite où ces calottes deviendraient infiniment petites.

NOTE II.

SUR LA FORCE QUI TENDRAIT A RAPPROCHER UN CONTINENT DE L'ÉQUATEUR (1).

MM. W. Koppen, P.-S. Epstein, W.-D. Lambert et E.-H.-L. Schweydar ont entrepris d'intéressantes études sur la force qui sollicite un iceberg ou un continent à fuir le pôle. M. Wegener résume les principaux résultats obtenus par ces auteurs dans le dernier paragraphe de son livre *La genèse des continents et des océans* (2) et donne les indications bibliographiques. Voir aussi la 4e édition allemande.

Hypothèse. — Le plus simple, dans ces études d'un problème local de géotectonique, est d'admettre que l'ellipsoïde des géodésiens est une figure d'équilibre et que la présence sur celui-ci d'un continent ne modifie sensiblement ni sa forme ni son mouvement autour de son axe de révolution. C'est là sans doute une hypothèse légitime, car le socle continental n'a qu'un volume très petit par rapport à celui de l'ellipsoïde.

Notre présente étude portera sur un élément de socle, de volume infiniment petit, de sorte qu'il nous suffit de *requérir* que l'on puisse, à partir d'un certain ordre de petitesse de l'élément, ne pas tenir compte de pareils troubles ou bien les envisager eux aussi comme infiniment petits. C'est fort peu demander.

La méthode. — 1° Nous ne présupposerons pas que les actions des poids des différents éléments d'un socle se réduisent à une résultante appliquée au centre de gravité; et, en effet, il convient de ne pas parler de centre de gravité puisque les forces de pesanteur ne sont pas parallèles et que c'est ce défaut même de parallélisme qui engendre la force que l'on cherche à mettre en évidence.

2° Par un artifice fort simple, nous éviterons le calcul des pressions sur la surface immergée du socle continental.

3° Nous discuterons séparément l'influence de la partie émergente et de la partie immergée sur l'intensité de la force translatrice.

Soit E la partie émergente du continent, et J la partie immergée, c'est-à-dire comprise dans l'ellipsoïde. Par socle ou continent nous entendons l'ensemble de E et de J.

---

(1) *Archives des Sciences physiques et naturelles*, mai-juin 1925.

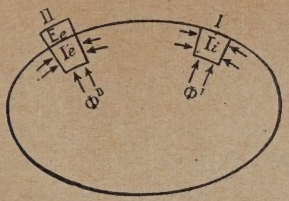
(2) Trad. Reichel, Blanchard, Paris, 1924 et dernière édition allemande : *Die Entstehung der Kontinente und Ozeane*, 1929.

L'état I sera celui où le continent n'existerait pas, la partie J étant remplie par la substance dans laquelle il baigne, substance appelée *sima*.

L'état II sera l'état réel correspondant à la présence d'un continent.

Notre figure 6 représente ces deux états, mais ce n'est que pour la clarté que nous y avons dissocié les deux parties J.

Fig. 6.



Soient, en un point x, $\varepsilon(x)$ la densité de masse du corps flottant, et $i(x)$ la densité de masse du sima.

Sous l'influence de l'attraction et de la force centrifuge synthétisées dans la pesanteur, il y a donc équilibre relatif dans l'état I entre la partie J à densité $i(x)$ et le reste du géoïde. Cette partie J que l'on peut, si cela semble bon, supposée solidifiée, est soumise aux forces suivantes :

a. Le système P_J^I des poids des éléments de J à densité $i(x)$;

b. Le système Φ^I des pressions sur la surface immergée.

Puisqu'il y a équilibre relatif, on doit avoir, symboliquement,

$$P_J^I + \Phi^I = 0. \tag{1}$$

Dans l'état II, le socle est soumis aux forces suivantes :

a. Le système P_E^{II} des poids de E à densité $e(x)$;

b. Le système P_J^{II} des poids de J à densité $e(x)$;

c. Le système Φ^{II} des pressions sur la surface immergée.

Le système Φ^{II} diffère probablement fort peu de Φ^I, de sorte que, dans cet aperçu de méthode, nous poserons

$$\Phi^I = \Phi^{II}. \tag{2}$$

Soit alors S le système résultant des forces appliquées au socle

$$S = P_E^{II} + P_J^{II} + \Phi^{II}.$$

Par (2) et (1), l'élimination de la pression Φ^{II} peut s'effectuer et donne

$$S = P_E^{II} + P_J^{II} - P_J^I. \tag{3}$$

Le système des forces appliquées au socle est ainsi ramené à trois systèmes de poids. Soient $g(x)$ l'intensité de la pesanteur en x, $\vec{g}(x)$ la direction de la verti-

cale (c'est un vecteur de longueur unité) et $\left[x\vec{g}\right]$ le moment du vecteur $\vec{g}$, pris en x, par rapport à l'origine d'un système d'axes, dont il est inutile de préciser la position pour le moment.

Appelons s la résultante et Σ le moment résultant du système S. Soient dE l'élément de volume de E et dJ l'élément de volume de J.

En langage vectoriel, nous aurons

$$(4)\qquad \vec{s} = \iiint e(x)\,g(x)\,\vec{g}(x)\,d\mathrm{E} + \iiint e(x)\,g(x)\,\vec{g}(x)\,d\mathrm{J} - \iiint i(x)\,g(x)\,\vec{g}(x)\,d\mathrm{J},$$

$$(5)\qquad \vec{\Sigma} = \iiint e(x)\,g(x)\left[x\vec{g}\right]d\mathrm{E} + \iiint e(x)\,g(x)\left[x\vec{g}\right]d\mathrm{J} - \iiint i(x)\,g(x)\left[x\vec{g}\right]d\mathrm{J}.$$

Force translatrice pour un élément vertical, rapport de cette force au poids de l'élément. — L'élément sera composé des normales à l'ellipsoïde, qui traversent une portion de surface $d\sigma$ de l'ellipsoïde, limitées à la hauteur h_{E} et à la profondeur h_{J}. Il s'agit donc d'un élément de fuseau dont la section par l'ellipsoïde est infiniment petite, tandis que sa hauteur totale reste finie.

Soient δg la différence de l'intensité de la pesanteur, et $\vec{\delta g}$ la déviation de la verticale à partir d'une origine O, de coordonnées $\varphi = \varphi$, $\lambda = \lambda$ et $h = 0$, prise au point où l'élément traverse l'ellipsoïde. En faisant $d\mathrm{V} = d\sigma\,dh$, la formule (4) s'écrira

$$(6)\qquad \vec{s} = eg\,d\sigma\int_0^{h_{\mathrm{E}}}\left(1+\frac{\delta g}{g}\right)\left(\vec{g}+\vec{\delta g}\right)dh + (e-i)g\,d\sigma\int_{-h_{\mathrm{J}}}^{0}\left(1+\frac{\delta g}{g}\right)\left(\vec{g}+\vec{\delta g}\right)dh.$$

Fixons notre système d'axes comme l'indique la figure 6, OX est tangent au méridien vers l'équateur et OY est dirigé suivant la normale à l'ellipsoïde vers le bas.

Affectons de l'indice X les composantes suivant l'axe OX et faisons de même pour Y.

Tenons compte des relations

$$(7)\qquad \vec{g}^{\mathrm{X}} = 0, \qquad \vec{g}^{\mathrm{Y}} = 1,$$

et s deviendra, en projection sur OX,

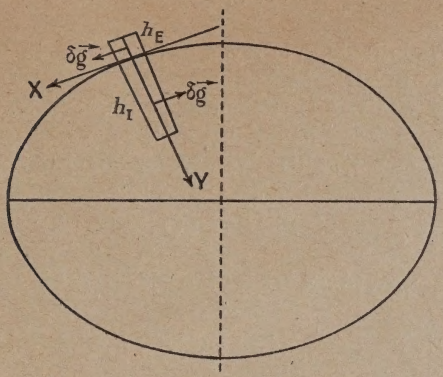
$$(8)\qquad s^{\mathrm{X}} = eg\,d\sigma\int_0^{h_{\mathrm{E}}}\left(1+\frac{\delta g}{g}\right)\vec{\delta g}^{\mathrm{X}}\,dh + (e-i)\,g\,d\sigma\int_{-h_{\mathrm{J}}}^{0}\left(1+\frac{\delta g}{g}\right)\vec{\delta g}^{\mathrm{X}}\,dh.$$

Or $\vec{\delta g}^{\mathrm{X}}$ est positif dans E, il ne peut être que négatif dans J, que l'ellipsoïde soit homogène ou qu'il y ait une forte concentration de masse en son centre,

e est positif, $e - i$ est négatif, de sorte que les deux termes de s^X sont tous deux positifs.

Cette remarque purement qualitative permet d'affirmer l'existence d'une force translatrice dirigée vers l'équateur.

Fig. 7.



Elle nous montre que les effets dus à la partie E *et à la partie* I *s'ajoutent, et cela que la condition d'isostasie soit satisfaite ou ne le soit pas.*

Projetons s sur l'axe OY :

$$(9) \qquad s^Y = eg\,d\sigma \int_0^{h_E} \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right)\left(1 + \delta\vec{g}^Y\right) dh + (e - i)\,g\,d\sigma \int_{-h_I}^{0} \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right)\left(1 + \delta\vec{g}^Y\right) dh.$$

L'équation $s^Y = 0$ exprime que le corps flotte sur le sima; ce sera donc la condition d'isostasie. Mais avant d'en venir là, remarquons ceci : les expressions (8) et (9) nous prouvent que les termes provenant des différences d'intensité de la pesanteur δg ne donnent lieu qu'à des termes du second degré en δg et $\delta\vec{g}$, petits vis-à-vis de ceux du premier dans (8), et des termes du premier et du second degré petits vis-à-vis de l'unité dans (9). *La déviation de la verticale produit donc un effet devant lequel on peut négliger, en première approximation, l'effet dû aux différences de l'intensité de la pesanteur.*

Nous ne maintiendrons ici que les parties prépondérantes. Alors (8) et (9) deviennent

$$(10) \qquad s^X = eg\,d\sigma \int_0^{h_E} \delta\vec{g}^X\,dh + (e - i)\,g\,d\sigma \int_{-h_I}^{0} \delta\vec{g}^X\,dh,$$

$$(11) \qquad s^Y = eg\,d\sigma\,h_E + (e - i)\,g\,d\sigma\,h_I.$$

La condition d'isostasie impose au corps de plonger de la quantité qu'il faut pour satisfaire à ce qui équivaut ici à la loi hydrostatique d'Archimède, condition essentielle dans la théorie de M. Wegener. Cette condition fournit l'équation

$$s^Y = 0$$

ou

$$eh_E = (i - e)h_J.$$

Puis la déviation de la verticale est donnée par la formule (151)

$$\vec{\delta g}^X = \delta\psi = \frac{h}{r}\Lambda(4-u)\sin 2\theta,$$

dans laquelle θ est la latitude, r le rayon terrestre et enfin Λ et u les constantes introduites au Chapitre VIII.

Cette relation est relative à l'extérieur de l'astre, mais M. Berner a pu établir qu'on ne commet pas d'erreur importante en la supposant vraie encore pour une profondeur d'une centaine de kilomètres. La force tangentielle s'écrit alors

$$s^X = \frac{\Lambda}{r} g\, d\sigma (4-u)\sin\theta\cos\theta\,[eh_E^2 + (i-e)h_J^2]$$
$$= \frac{\Lambda}{r} eg(h_E + h_J)\, d\sigma (4-u)\sin\theta\cos\theta\, h_E.$$

Le rapport de cette force au poids P du flotteur ne dépend que de la hauteur de la partie émergente :

$$\frac{s^X}{P} = \Lambda(4-u)\frac{h_E}{r}\sin\theta\cos\theta.$$

Si l'on prend, $h_E = 3^{km},2$, $r = 64000^{km}$, $\Lambda = \frac{1}{583,5}$, $u = 0,976$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, la force translatrice est égale au $\frac{1}{750000}$ du poids du continent.

Ces $3^{km},2$ représentent la hauteur moyenne d'un continent comptée à partir de la profondeur moyenne des océans, c'est-à-dire de la limite du sima. Cette force translatrice agit sur tous les corps flottants : icebergs, bateaux, etc.

Pour les plus grands transatlantiques, elle n'atteindrait pas 1^{kg}.

NOTE III.

SUR UNE AUTRE FORCE TRANSLATRICE D'ORIGINE LUNI-SOLAIRE.

M. Berner (1) a calculé l'ordre de grandeur d'une autre force, d'origine luni-solaire, qui tendrait à déplacer un continent par rapport au milieu dans lequel il baigne.

Reprenons en effet les états I et II de la figure de la Note précédente.

Dans l'état I, le continent est remplacé par du sima; ce dernier doit être en équilibre relatif avec son voisinage. Cette masse, dans l'état I, peut subir le mouvement des marées terrestres, mais son voisinage le subit également. Elle n'est pas alors sollicitée à se déplacer tangentiellement par rapport au milieu.

Dans l'état II, l'attraction luni-solaire agit au contraire différemment sur la masse continentale et sur le sima qu'elle remplace.

La force translatrice est alors la différence de l'attraction des astres étrangers sur le sima dans l'état I et sur le continent dans l'état II.

Supposons la Lune au zénith, c'est alors que cette différence est la plus grande.

Soient ρ la distance de la Lune au centre de gravité de la masse dans l'état I, et $\rho - d$ cette distance dans l'état II. Soient encore m la masse du continent et M la masse de la Lune. La différence des attractions est évidemment

$$F = \mathcal{K} m M \left[\frac{1}{(\rho - d)^2} - \frac{1}{\rho^2} \right].$$

L'attraction de la masse par la Terre du même ordre que le poids du continent est

$$P = \mathcal{K} \frac{m M'}{r^2},$$

M' étant la masse de la Terre et r le rayon de celle-ci.

Le rapport de la force F au poids P s'écrit, en première approximation, comme on le vérifie sans peine,

$$\frac{F}{P} = 2 d \frac{M}{M'} \frac{r^2}{\rho^3}.$$

Mais on a, à peu près, $M' = 81,5 \times M$ et $\rho = 60 r$; enfin les géologues indiquent $d = 1,6^{km}$. L'ordre de grandeur du rapport précédent est ainsi

$$\frac{F}{P} \sim \frac{1}{35} \times \frac{1}{10^9}.$$

(1) *Compte rendu des Séances de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève*, juin 1929.

Cette force F est donc 50000 fois plus faible que celle qui sollicite un continent à fuir le pôle.

Quand la Lune n'est pas au zénith, et c'est alors seulement qu'une force tangentielle se manifeste, cette force est encore plus faible; elle agit d'ailleurs alternativement vers l'Est et vers l'Ouest, elle ne peut pas être la cause de déplacements continentaux. Telle est la conclusion de M. Berner.

Remarques au sujet des mouvements internes.

Les deux forces mises en évidence dans cette Note et dans la précédente sont trop faibles pour déplacer à elles seules un corps flottant par rapport au milieu ambiant comme un bateau qui fend l'eau. Il peut y avoir d'autres forces agissantes, probablement faibles et sans action directe. L'hypothèse qui paraît alors la seule possible est d'admettre que les continents se sont peu déplacés par rapport au milieu ambiant immédiat mais ils peuvent avoir été entraînés avec ce milieu par des courants de sima de grande amplitude et très lents. Cette supposition rendrait mieux compte en tout cas de la conservation des profils (Afrique et Amérique du Sud).

Ces courants de sima relèvent du troisième problème défini au début de cet ouvrage. Il s'agirait de savoir quels mouvements internes ont pu se maintenir au cours des époques géologiques.

M. Dive a démontré la possibilité d'une rotation permanente pour un fluide parfait où les couches internes auraient une plus grande vitesse angulaire que la surface libre. Ceci l'a conduit à formuler des idées très suggestives au point de vue géologique sur l'influence qu'aurait un léger courant dirigé vers l'Est à la profondeur de 100^{km}, c'est-à-dire à la base des socles continentaux.

La viscosité est évidemment la grande inconnue du problème. Les questions qui s'y rattachent sont fort complexes et l'on est mal renseigné. Certains arguments militent en faveur d'une forte viscosité, d'autres d'une faible en raison des températures élevées. Quoi qu'il en soit de cet ordre de grandeur, un raisonnement connu d'Helmholtz permet de dire : Les effets de la viscosité seront d'autant plus lents à se manifester que les dimensions du fluide seront plus considérables. Ces effets varient même en raison inverse du carré des dimensions.

Il faut à cet égard se départir de la tendance à confondre l'échelle humaine avec celle des dimensions terrestres.

Si une expérience faite dans un laboratoire sur un fluide visqueux nous montre, par exemple, que les couches n'ont cheminé que de 1^{mm} et se sont arrêtées au bout d'une seconde, il faudra néanmoins en conclure que le phénomène, pris à l'échelle terrestre, aurait duré plus d'un million d'années et que les particules auraient fait mille fois le tour du globe. M. Dive traduit cette conséquence des équations de Navier d'une manière plus frappante encore : c'est une sphère en eau qui donnerait à notre échelle une image véritable de la Terre.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉFACE V

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I.

Rappel de quelques notions d'analyse.

1. Terminologie relative à la théorie des ensembles 5
2. Fonctions régulières et surfaces régulières 5
3. La dérivée normale 7
4. Les identités de Green 7
5. Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet 9
6. Le potentiel newtonien et les potentiels de surface 10
7. Intégrale et formule de Gauss 11
8. Sur le potentiel créé par une masse homogène 12
9. Sur les charges électriques en équilibre 13
10. Polynomes de Legendre et fonctions sphériques 13
11. Propriétés intégrales des fonctions sphériques 15
12. Sur les polynomes harmoniques 16
13. Une question de convergence et les développements de l'inverse de la distance. 18
14. Les développements en série du potentiel newtonien 19
15. Autres expressions du potentiel newtonien et de sa différentielle totale 21

CHAPITRE II.

Équilibre relatif et rotations permanentes.

16. Les équations de l'hydrodynamique 25
17. Équilibre relatif 26
18. Remarques 27
19. Mouvements généraux et pesanteur généralisée 29
20. Les rotations permanentes 31
21. La méthode de M. Dive 33
22. Extension d'une équation de Poincaré 34
23. Extension d'un théorème de M. Lichtenstein 35
24. Autres propriétés 39
25. Extension du théorème de Stokes 40
26. Les moments d'inertie et les valeurs stokiennes 42
27. Le point de vue de la théorie des équations aux dérivées partielles 43

CHAPITRE III.

Stratification, densité et pesanteur.

28. La formule de H. Bruns 49
29. Complément analytique 51

Pages.

30. La stratification et sa représentation paramétrique 52
31. Relations entre la stratification, la densité et la pesanteur 54
32. Le cas exceptionnel des sphères concentriques 56
33. Une condition nécessaire purement géométrique 56
34. L'impossibilité des stratifications homothétiques 57
35. Sur la représentation analytique des surfaces équipotentielles 59
36. L'impossibilité des stratifications ellipsoïdales 60
37. La stratification au voisinage du centre 61
38. L'équation de Clairaut 62
39. Les théorèmes de Clairaut 63
40. L'équation de d'Alembert 64

CHAPITRE IV.

Le procédé uniforme.

41. Le desideratum formulé par Tisserand 67
42. Les données du problème 68
43. Usage d'une identité de Green 69
44. La transformation fondamentale 70
45. La condition nécessaire et suffisante 71
46. La cavité et le desideratum de Tisserand 73
47. Équation de Poincaré et masse totale 74
48. Les éléments géométriques du problème 75
49. Transformation du système fondamental 76
50. Un changement de fonction inconnue 78
51. Cas particulier de la masse homogène et des ellipsoïdes 79
52. Remarques sur la stratification d'une masse hétérogène 80

CHAPITRE V.

Les approximations successives.

53. Le principe des approximations 82
54. Remarques 84
55. L'approximation d'ordre n 85
56. Un raisonnement par récurrence 86
57. L'équation homogène 88
58. L'approximatien d'ordre zéro 90
59. L'approximation d'ordre un 90
60. L'approximation d'ordre deux 91

CHAPITRE VI.

Les résultats classiques.

61. Le système fondamental et sa résolution à l'extérieur de l'astre 94
62. L'équation de Clairaut et ses transformées 95
63. Discussion des variations de l'aplatissement 97
64. Variations de la pesanteur avec la latitude et avec l'altitude 99
65. La différence des moments d'inertie 99
66. L'artifice de Radau 100
67. Loi de Lipschitz et hypothèse d'un noyau central 102
68. Sur la dérivée de l'aplatissement 103

CHAPITRE VII.

La seconde approximation.

Pages.
69. Résolution à l'extérieur de l'astre 106
70. Passage à la latitude géographique 107
71. Ellipsoïde et correction 108
72. La correction dans le cas de la Terre 110
73. La correction pour un astre quelconque 112
74. La différence des moments d'inertie 113

CHAPITRE VIII.

Géodésie et précession.

75. Rappel des résultats obtenus par le procédé uniforme 116
76. Les résultats classiques 118
77. Les relations sur la surface libre en seconde approximation 119
78. Le désaccord souligné par Poincaré 120
79. Les éléments fondamentaux 122
80. La constante J et les mesures précessionnelles 123
81. Conclusions 124

CHAPITRE IX.

Autres applications.

82. Le potentiel newtonien à l'extérieur de l'astre 127
83. Données et premiers résultats relatifs aux planètes 128
84. Le cas de Jupiter 131
85. Figures à anneaux 132
86. Le problème des étoiles doubles 134

CHAPITRE X.

Applications aux rotations permanentes de genre un.

87. La condition nécessaire et suffisante 138
88. Sur une loi spéciale de variation de ω 139
89. Le tableau fondamental et sa résolution 140
90. Ellipsoïde tangent et correction 142
91. Le cas du Soleil 143

CHAPITRE XI.

Remarques au sujet des mouvements généraux et de la stabilité.

92. Objet du chapitre et notations 145
93. Axes liés à un fluide 146
94. Déformation et stabilité 148
95. Un critère de stabilité 150
96. Un théorème récent d'Appell 151
97. Équations de l'énergie et des moments dans un système d'axes quelconques 152
98. Les critères de stabilité de Lord Kelvin et de Poincaré 153

CHAPITRE XII.

Sur les petites vibrations des astres fluides.

Pages.

99. Les mouvements de genre un 155
100. Résumé et extension de la méthode de la cavité 157
101. Remarques sur les surfaces arguments 158
102. Le procédé uniforme 159
103. Les approximations pour les sphéroïdes 160
104. Développements et identifications 162
105. Équations complémentaires 163
106. Les vibrations propres d'une masse homogène incompressible 165
107. Sur les petites vibrations d'une masse incompressible hétérogène 168
108. Le cas d'un astre perturbateur 169
109. Petites vibrations au voisinage d'un état d'équilibre relatif 173
110. L'équation de continuité pour les petits mouvements 174
111. Sur le déplacement radial des particules 176

NOTE I. — A propos d'une hypothèse géologique 178

NOTE II. — Sur la force qui tendrait à rapprocher un continent de l'équateur. 184

NOTE III. — Sur une autre force translatrice d'origine luni-solaire 189

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

BINDING LIST NOV 2 1966

508588
Wavre, Rolin
Figures planétaires et géodésie.
As
W

University of Toronto
Library

DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET

Acme Library Card Pocket
LOWE-MARTIN CO. LIMITED